Projeto e Análise de Algoritmos

Aula 10 – Métodos de Ordenação de Complexidade Linear

Edirlei Soares de Lima
<edirlei@iprj.uerj.br>

Ordenação

- **Problema:**
  - **Entrada**: conjunto de itens $a_1, a_2, \ldots, a_n$;
  - **Saída**: conjunto de itens permutados em uma ordem $a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{kn}$, tal que, dada uma função de ordenação f, tem-se a seguinte relação: $f(a_{k1}) < f(a_{k2}) < \ldots < f(a_{kn})$.

- Ordenar consiste no processo de rearranjar um conjunto de objetos em uma ordem crescente ou descendente.

- O objetivo principal da ordenação é facilitar a recuperação posterior de itens do conjunto ordenado.

Métodos de Ordenação de Complexidade Linear

- O **limite assintótico mínimo** para algoritmos de ordenação baseados em comparações é **O(n log n)**, mas isso não quer dizer que não seja possível existir um algoritmo de ordenação melhor!

- Existem algoritmos que **não são baseados em comparações**.

- Porém, eles exigem algum outro tipo de conhecimento sobre os dados a serem ordenados, portanto **não são tão genéricos** como os algoritmos clássicos de ordenação por comparação.

Métodos de Ordenação de Complexidade Linear

- Algoritmos de ordenação de complexidade O(n):
  - **Counting Sort:** Os elementos a serem ordenados são números inteiros pequenos, isto é, inteiros x onde $x \in O(n)$;
  - **Radix Sort:** Os elementos a serem ordenados são números inteiros de comprimento máximo constante, isto é, independente de n;
  - **Bucket Sort:** Os elementos são números uniformemente distribuídos em um determinado intervalo (Exemplo: [0..1)).

Counting Sort

- Suponha que um vetor A a ser ordenado contenha n números inteiros, todos menores ou iguais a k ($k \in O(n)$).

- Ideia básica:
  - Determinar, para cada elemento x da entrada A, o número de elementos maiores que x;
  - Com esta informação, determinar a posição de cada elemento;

  - **Exemplo:** se 17 elementos forem menores que x então x ocupa a posição 18 na saída.

Counting Sort

- O algoritmo Counting Sort ordena estes n números em tempo O(n + k) (equivalente a O(n)).

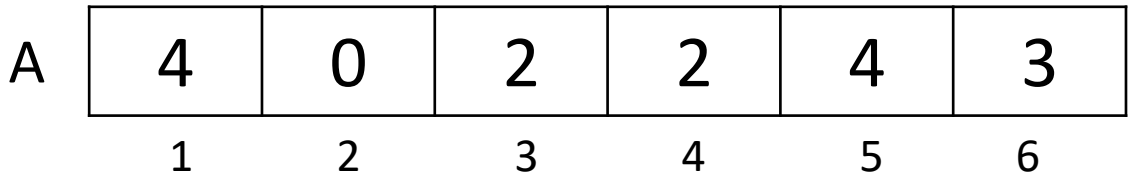
- O algoritmo usa dois vetores auxiliares:
  - C, de tamanho k, que guarda em C[i] o número de ocorrências de elementos i em A;
  - B, de tamanho n, onde se constrói o vetor ordenado;

Counting Sort

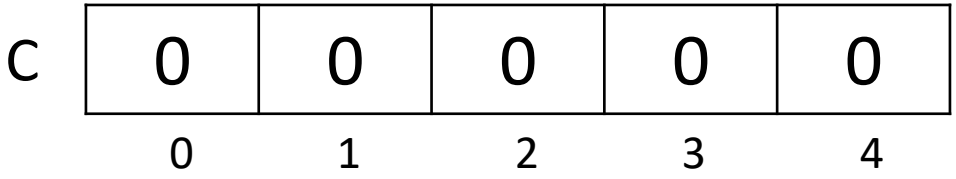
```
function couting_sort(int A[], n, k)
begin
  for i ← 0 to k do
    C[i] ← 0
  for j ← 1 to n do
    C[A[j]] ← C[A[j]] + 1
  for i ← 1 to k do
    C[i] ← C[i] + C[i – 1]
  for j ← 1 to n do
  begin
    B[C[A[j]]] ← A[j]
    C[A[j]] ← C[A[j]] – 1
  end
end
```

O(n + k)

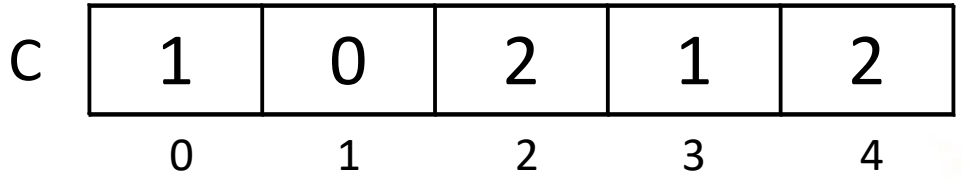
Counting Sort



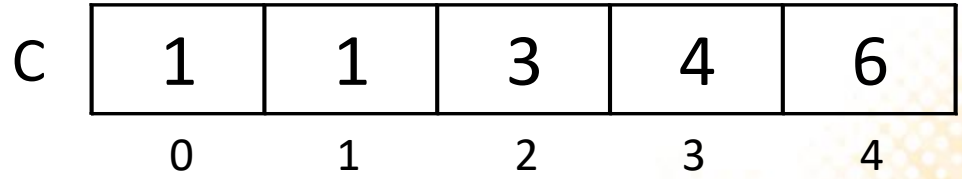

```
for i ← 0 to k do
  C[i] ← 0
```



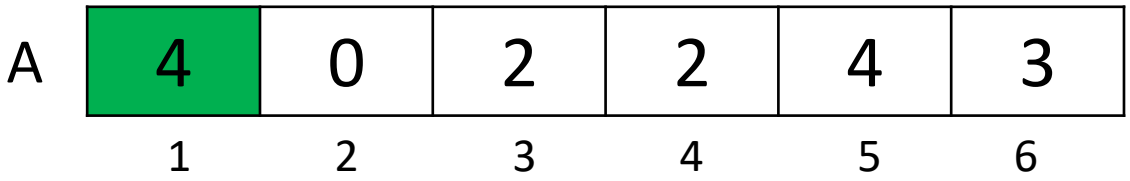

```
for j ← 1 to n do
  C[A[j]] ← C[A[j]]+1
```



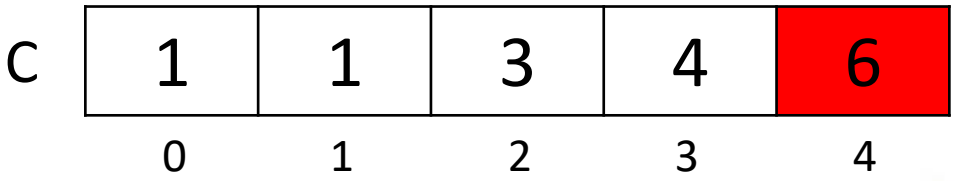

```
for i ← 1 to k do
  C[i] ← C[i] + C[i-1]
```

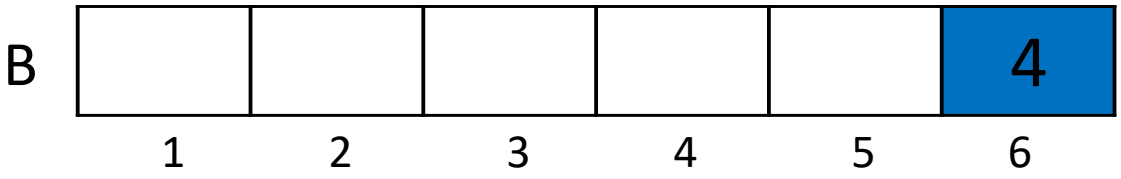


Counting Sort

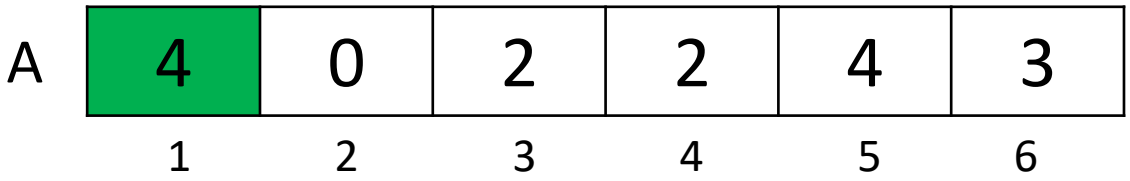



```
for j ← 1 to n do
begin
  B[C[A[j]]] ← A[j]
  C[A[j]] ← C[A[j]] - 1
end
```

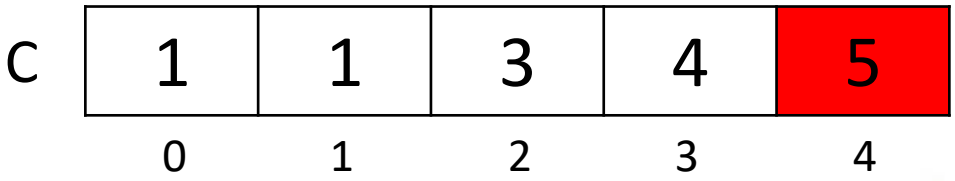




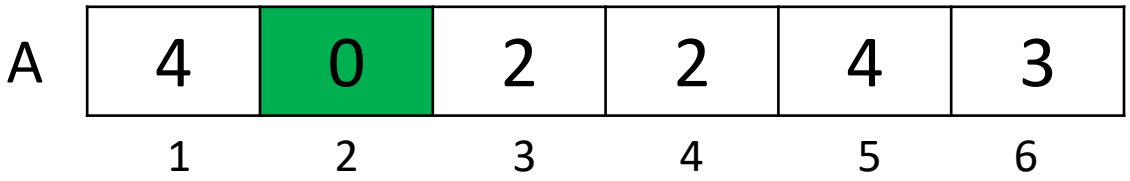
Counting Sort



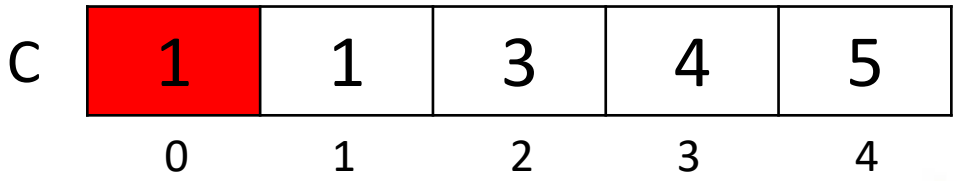

```
for j ← 1 to n do
begin
  B[C[A[j]]] ← A[j]
  C[A[j]] ← C[A[j]] - 1
end
```

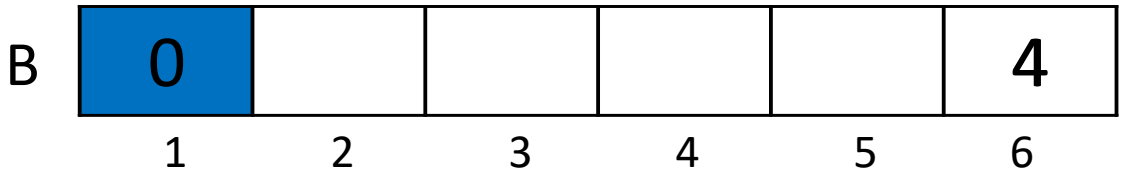


Counting Sort

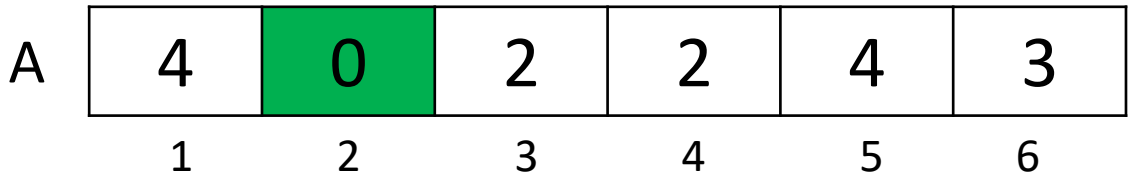



```
for j ← 1 to n do
begin
  B[C[A[j]]] ← A[j]
  C[A[j]] ← C[A[j]] - 1
end
```

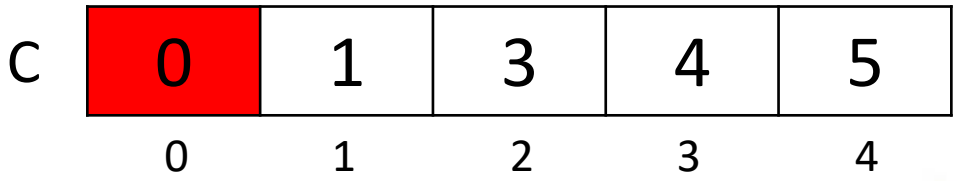


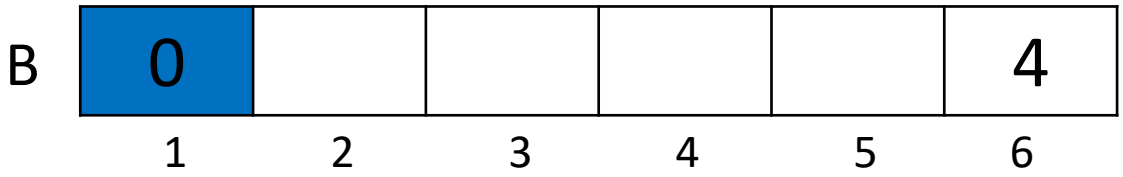


Counting Sort

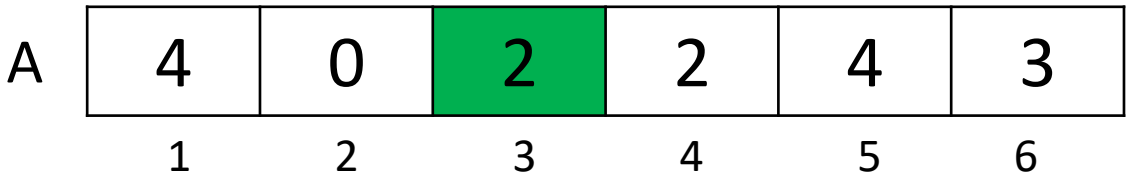



```
for j ← 1 to n do
begin
  B[C[A[j]]] ← A[j]
  C[A[j]] ← C[A[j]] - 1
end
```

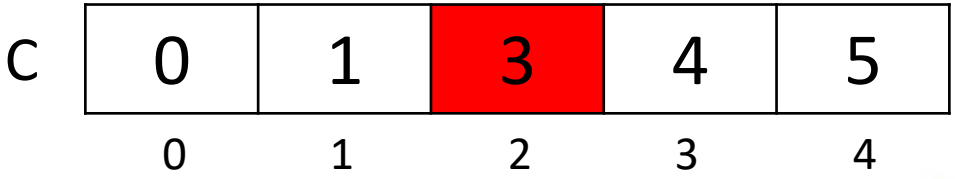


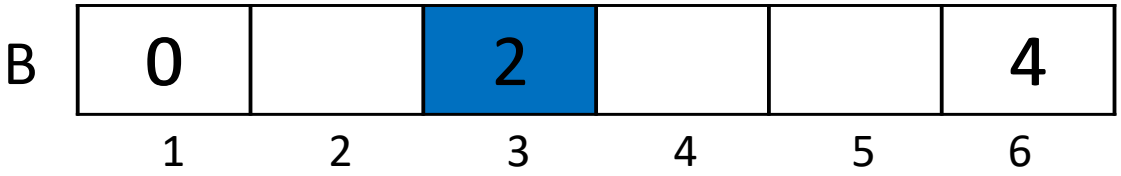


Counting Sort

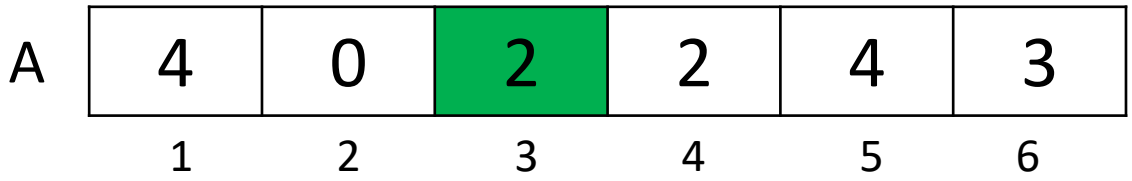



```
for j ← 1 to n do
begin
  B[C[A[j]]] ← A[j]
  C[A[j]] ← C[A[j]] - 1
end
```

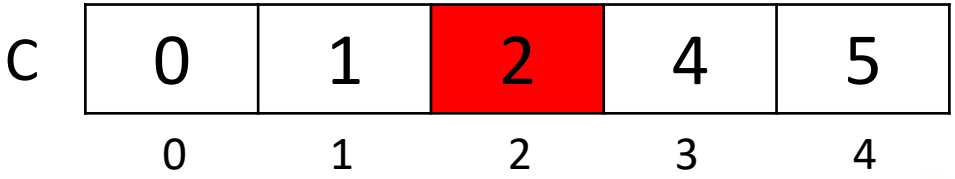


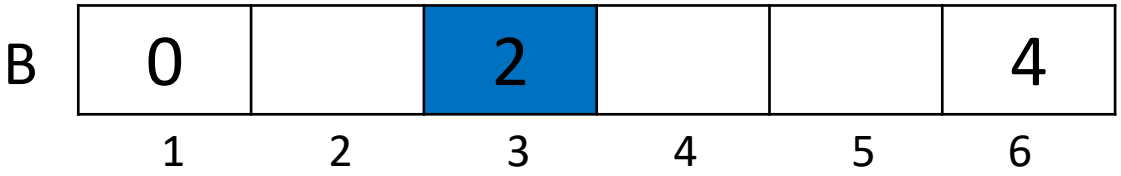


Counting Sort

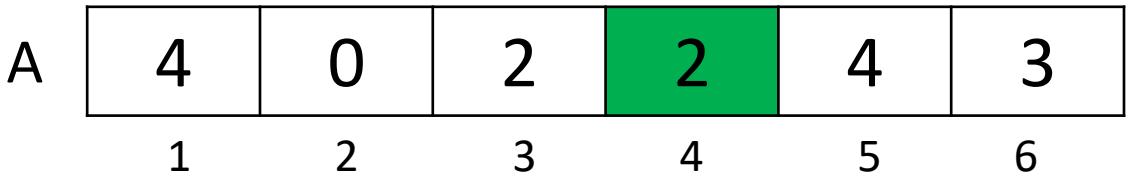



```
for j ← 1 to n do
begin
  B[C[A[j]]] ← A[j]
  C[A[j]] ← C[A[j]] - 1
end
```

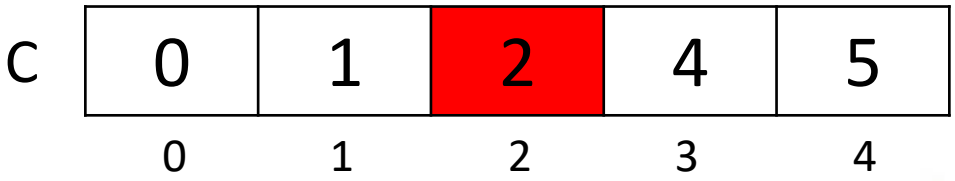


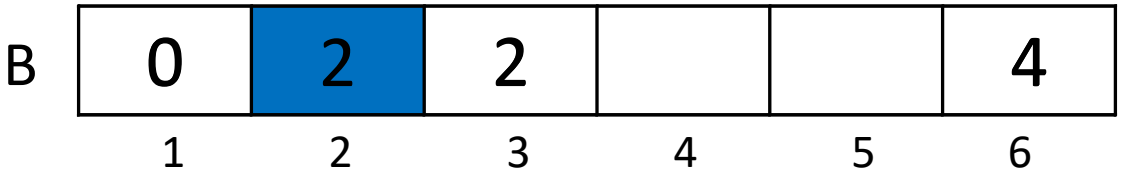


Counting Sort

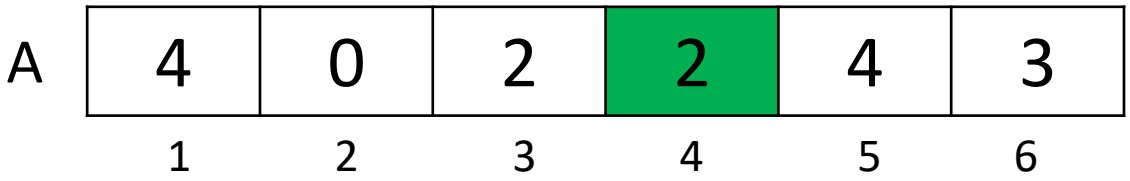



```
for j ← 1 to n do
begin
  B[C[A[j]]] ← A[j]
  C[A[j]] ← C[A[j]] - 1
end
```

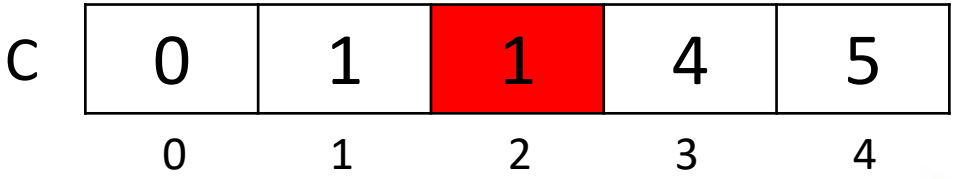


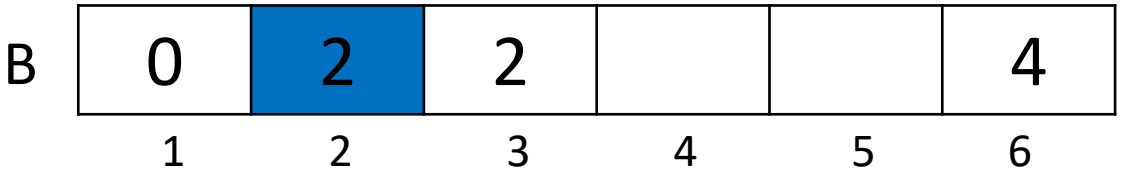


Counting Sort

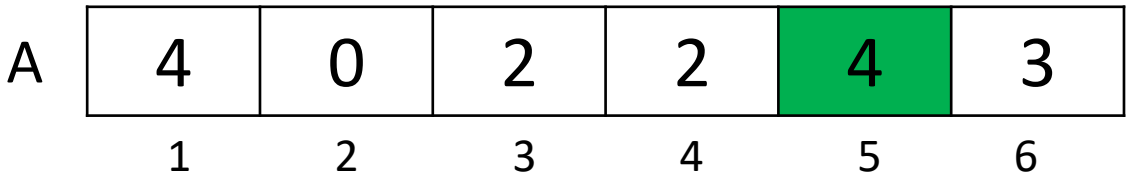



```
for j ← 1 to n do
begin
  B[C[A[j]]] ← A[j]
  C[A[j]] ← C[A[j]] - 1
end
```

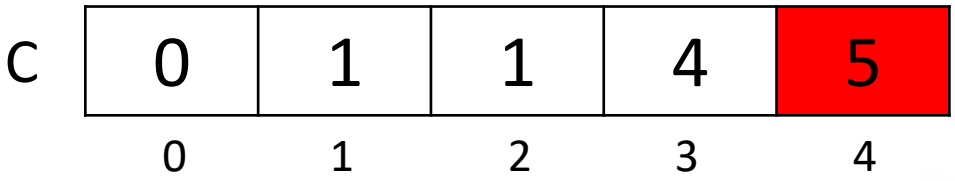


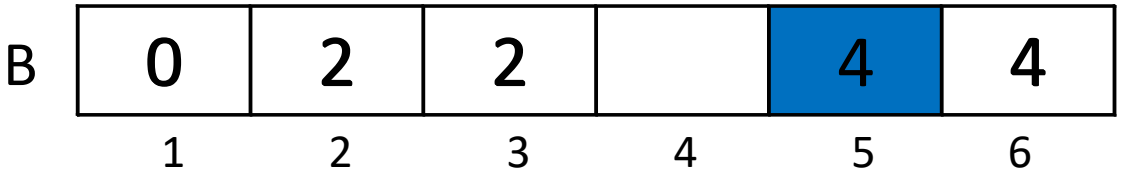


Counting Sort

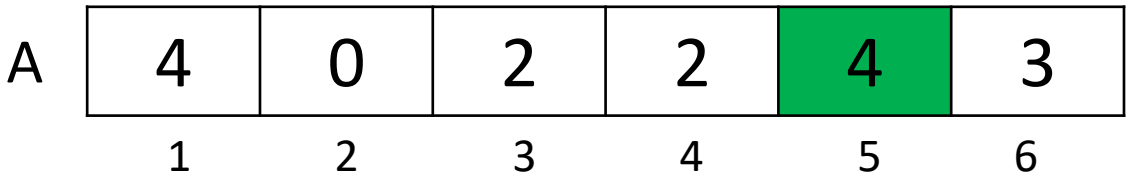



```
for j ← 1 to n do
begin
  B[C[A[j]]] ← A[j]
  C[A[j]] ← C[A[j]] - 1
end
```

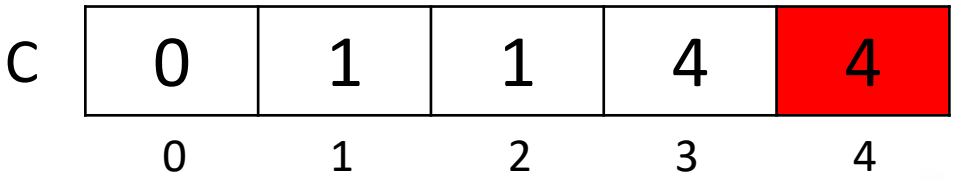


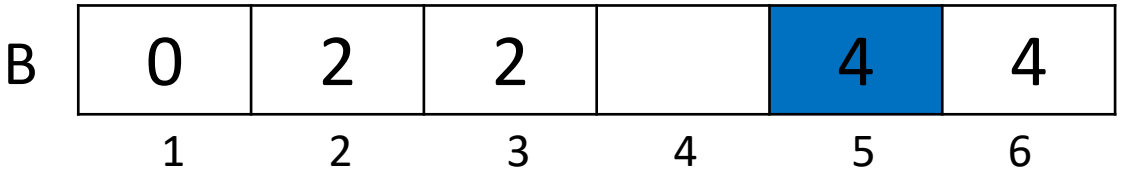


Counting Sort

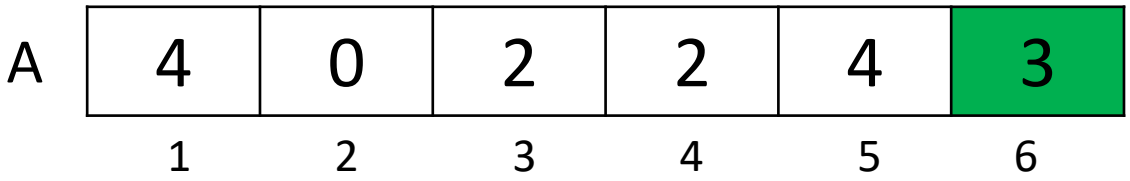



```
for j ← 1 to n do
begin
  B[C[A[j]]] ← A[j]
  C[A[j]] ← C[A[j]] - 1
end
```

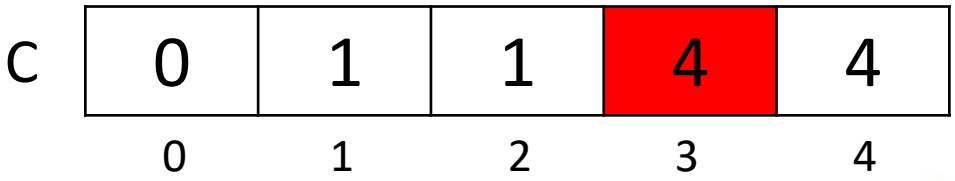


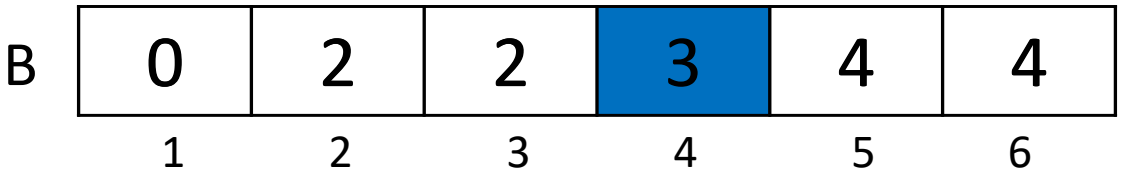


Counting Sort

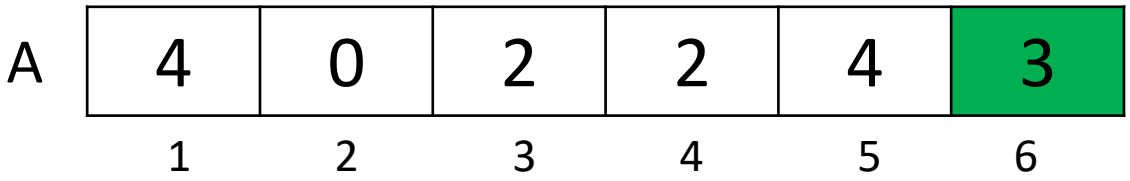



```
for j ← 1 to n do
begin
  B[C[A[j]]] ← A[j]
  C[A[j]] ← C[A[j]] - 1
end
```

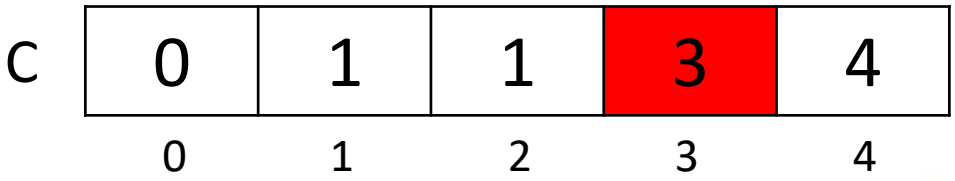


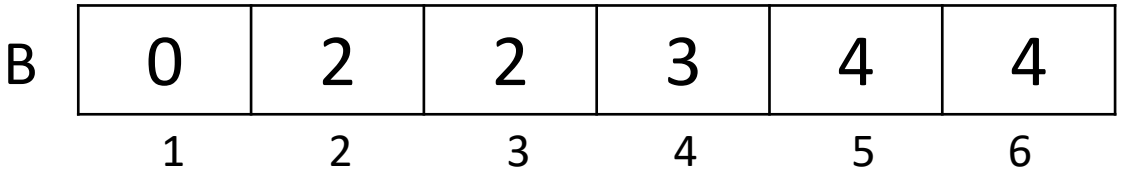


Counting Sort




```
for j ← 1 to n do
begin
  B[C[A[j]]] ← A[j]
  C[A[j]] ← C[A[j]] - 1
end
```





Counting Sort – Complexidade

- O algoritmo não faz comparações entre elementos de A.
- Sua complexidade deve ser medida com base nas outras operações (aritméticas, atribuições, etc.)
- Claramente, o número de tais operações é uma função em **O(n + k)**, já que temos dois loops simples com n iterações e dois com k iterações.
- Assim, quando $k \in O(n)$, este algoritmo tem complexidade **O(n)**.

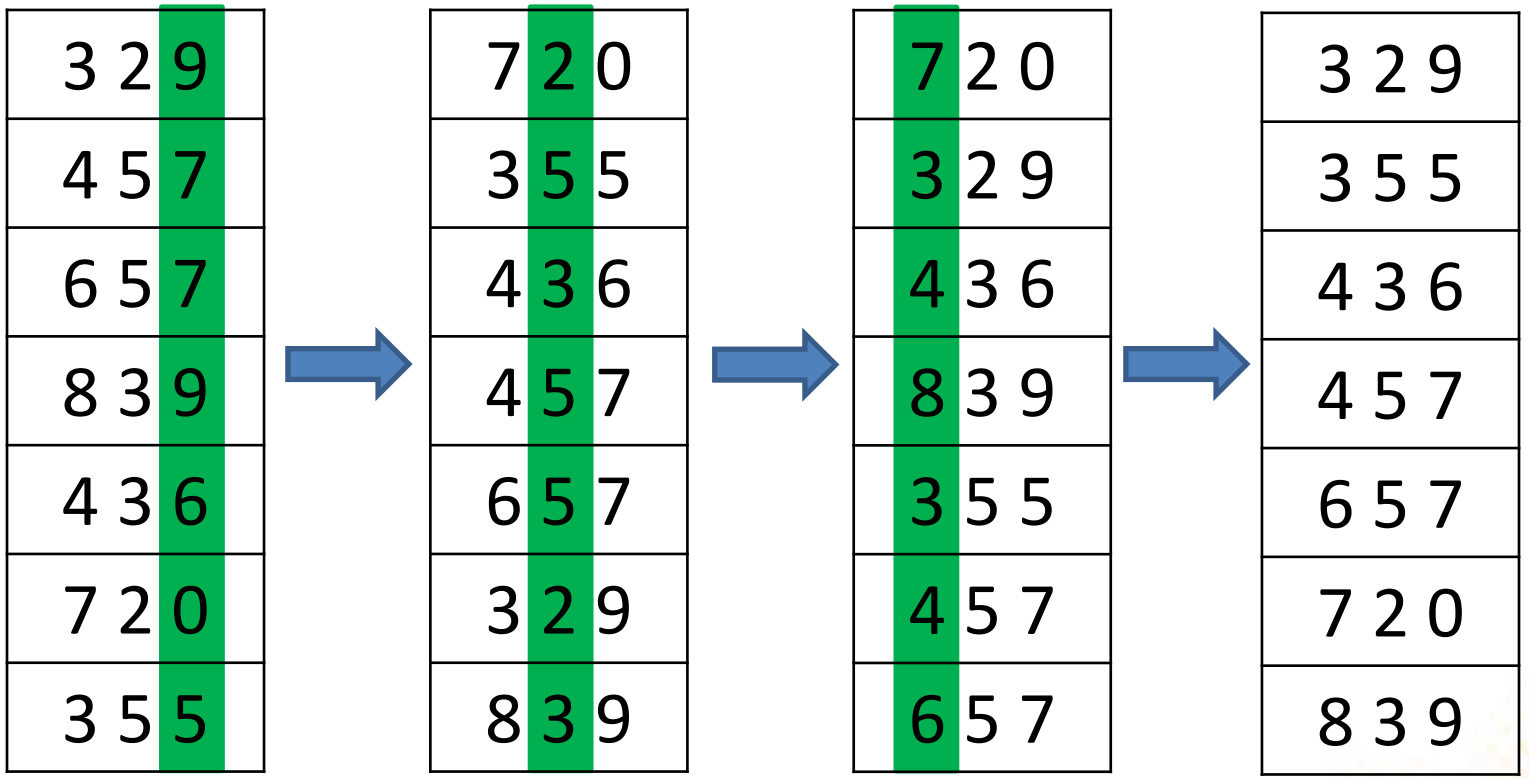
Radix Sort

- Pressupõe que as chaves de entrada possuem limite no valor e no tamanho (quantidade de dígitos d);

- Ordena em função dos dígitos (um de cada vez) a partir do menos significativo;
  - É essencial utilizar um segundo algoritmo estável para realizar a ordenação de cada dígito.

```
function radix_sort(int A[], n)
begin
  for i ← 1 to n do
    ordene os elementos de A pelo i-ésimo dígito usando
    um metodo estável
end
```

Radix Sort


3 2 9
4 5 7
6 5 7
8 3 9
4 3 6
7 2 0
3 5 5
7 2 0
3 5 5
4 3 6
4 5 7
6 5 7
3 2 9
8 3 9
7 2 0
3 2 9
4 3 6
8 3 9
3 5 5
4 5 7
6 5 7
3 2 9
3 5 5
4 3 6
4 5 7
6 5 7
7 2 0
8 3 9

Radix Sort – Complexidade

- A complexidade do Radix Sort depende da complexidade do algoritmo estável usado para ordenar cada dígito dos elementos.

- Se essa complexidade for O(n), obtemos uma complexidade total de $\Theta(dn)$ para o Radix Sort.
  - Como supomos d constante, a complexidade reduz-se para O(n).

- Se o algoritmo estável for, por exemplo, o Counting Sort, obtemos a complexidade O(n + k).
  - Supondo $k \in O(n)$, resulta numa complexidade **O(n)**.

Bucket Sort

- Assume que a entrada consiste em elementos distribuídos de forma **uniforme** sobre uma determinado intervalo (exemplo: [0..1]);
- A ideia do Bucket Sort é dividir o intervalo em n subintervalos de mesmo tamanho (**baldes**), e então distribuir os n números nos baldes;
- Uma vez que as entradas são uniformemente distribuídas, não se espera que muitos números **caiam em cada balde**;
- Para produzir a saída ordenada, basta ordenar os números em cada balde, e depois **examinar os baldes em ordem**, listando seus elementos;

Bucket Sort

```
function bucket_sort(int A[], n, k)
begin
  crie o vetor de baldes (listas) B de tamanho k

  for i ← 1 to n do
    insira A[i] no seu balde B[msbits(A[i])] na ordem

  for i ← 1 to k do
    concatene os baldes B[i]
end
```

Bucket Sort

	B
0	/
1	/
2	/
3	/
4	/
5	/
6	/
7	/
8	/
9	/

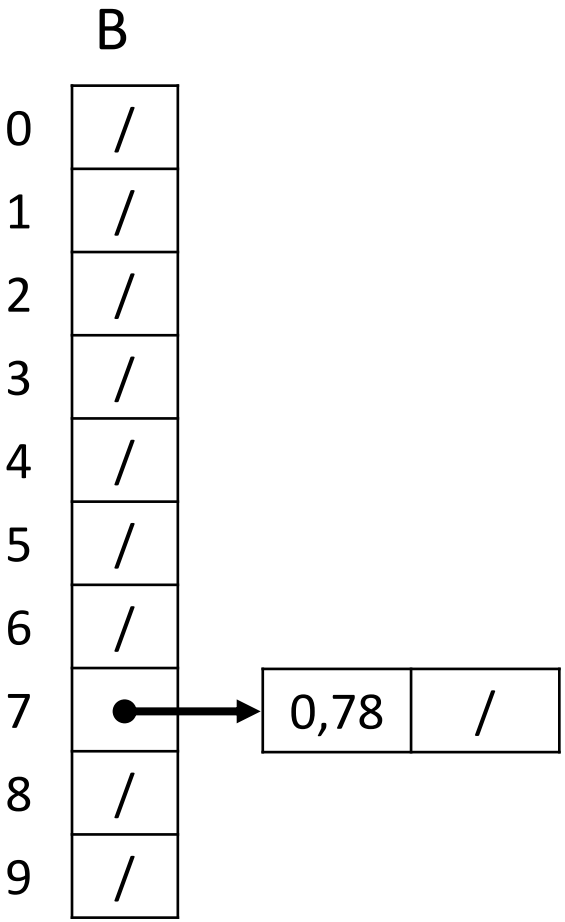
A										
	0,78	0,17	0,39	0,26	0,72	0,94	0,21	0,12	0,23	0,68

Bucket Sort

	B
0	/
1	/
2	/
3	/
4	/
5	/
6	/
7	/
8	/
9	/

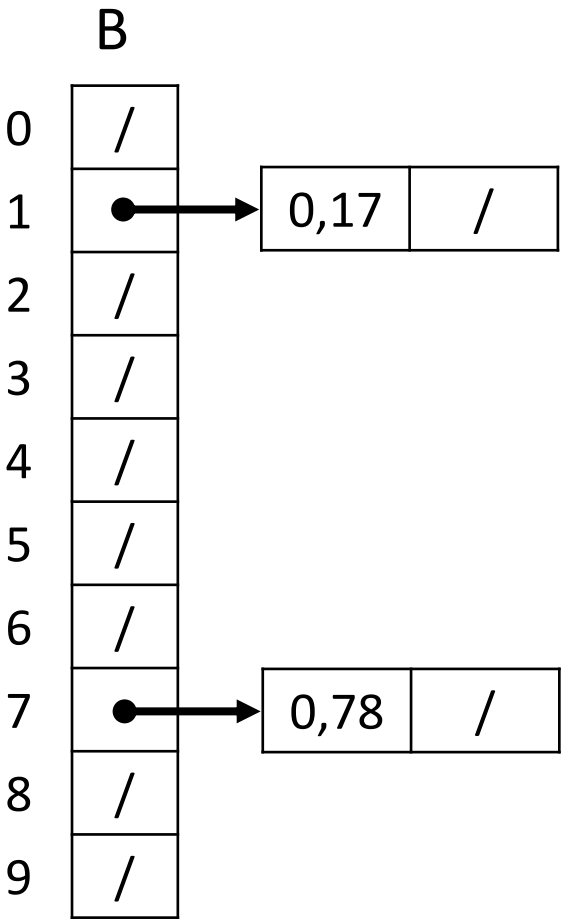
A									
	0,78	0,17	0,39	0,26	0,72	0,94	0,21	0,12	0,23	0,68

Bucket Sort



A	0,78	0,17	0,39	0,26	0,72	0,94	0,21	0,12	0,23	0,68

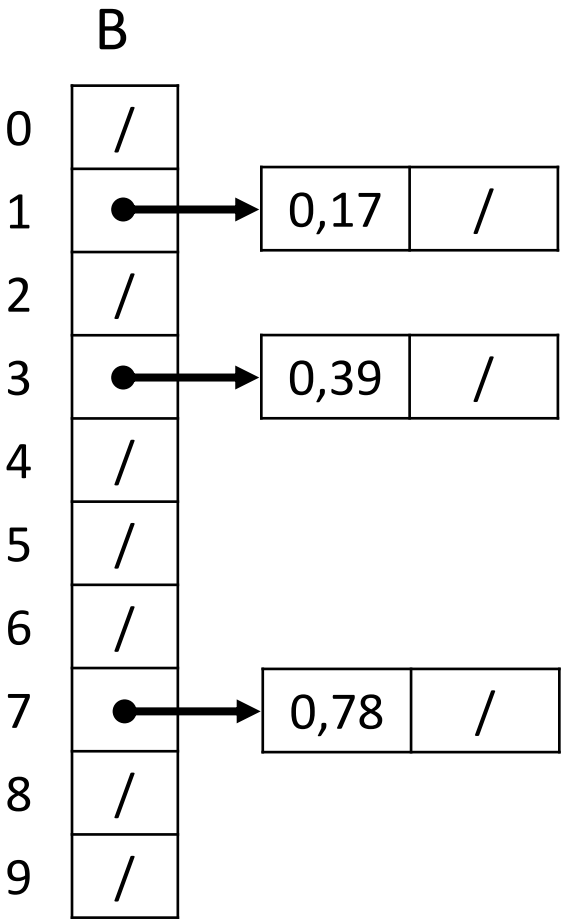
Bucket Sort



A

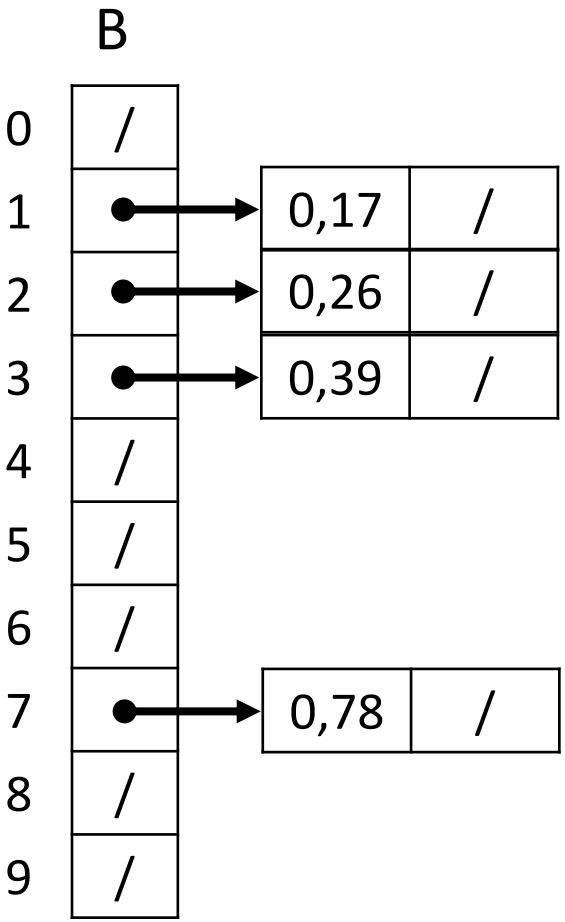
0,78	0,17	0,39	0,26	0,72	0,94	0,21	0,12	0,23	0,68

Bucket Sort



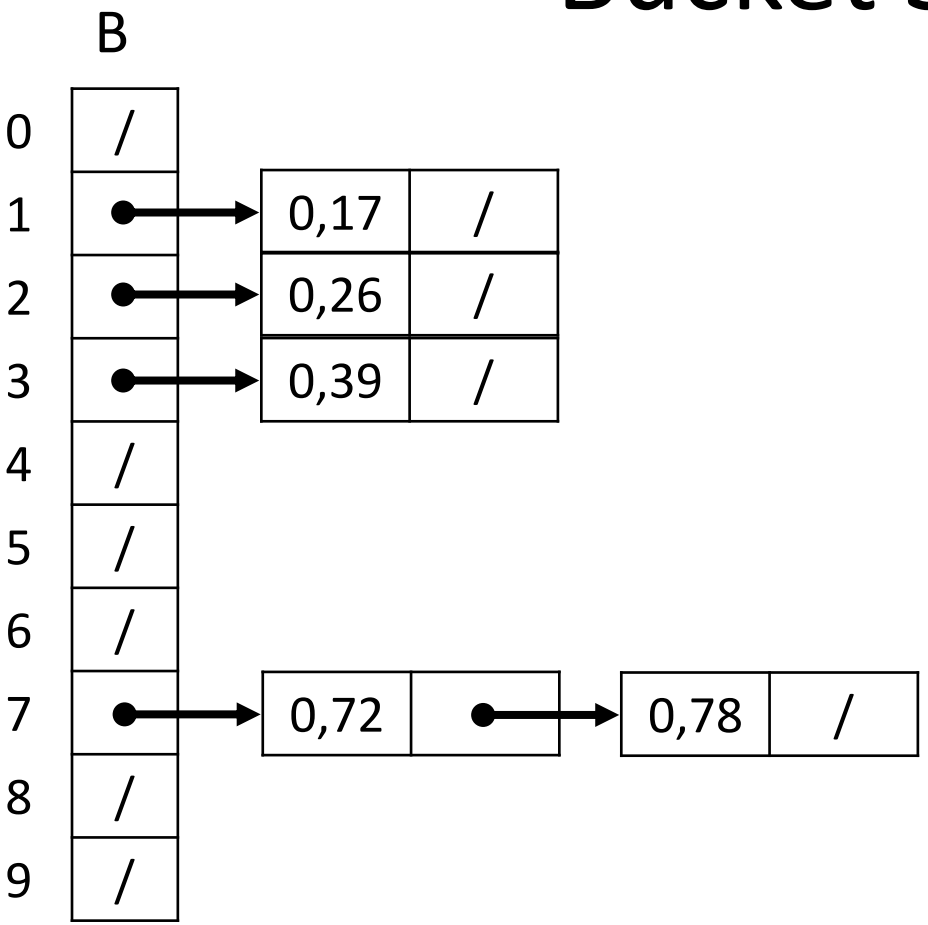
A	0,78	0,17	0,39	0,26	0,72	0,94	0,21	0,12	0,23	0,68

Bucket Sort



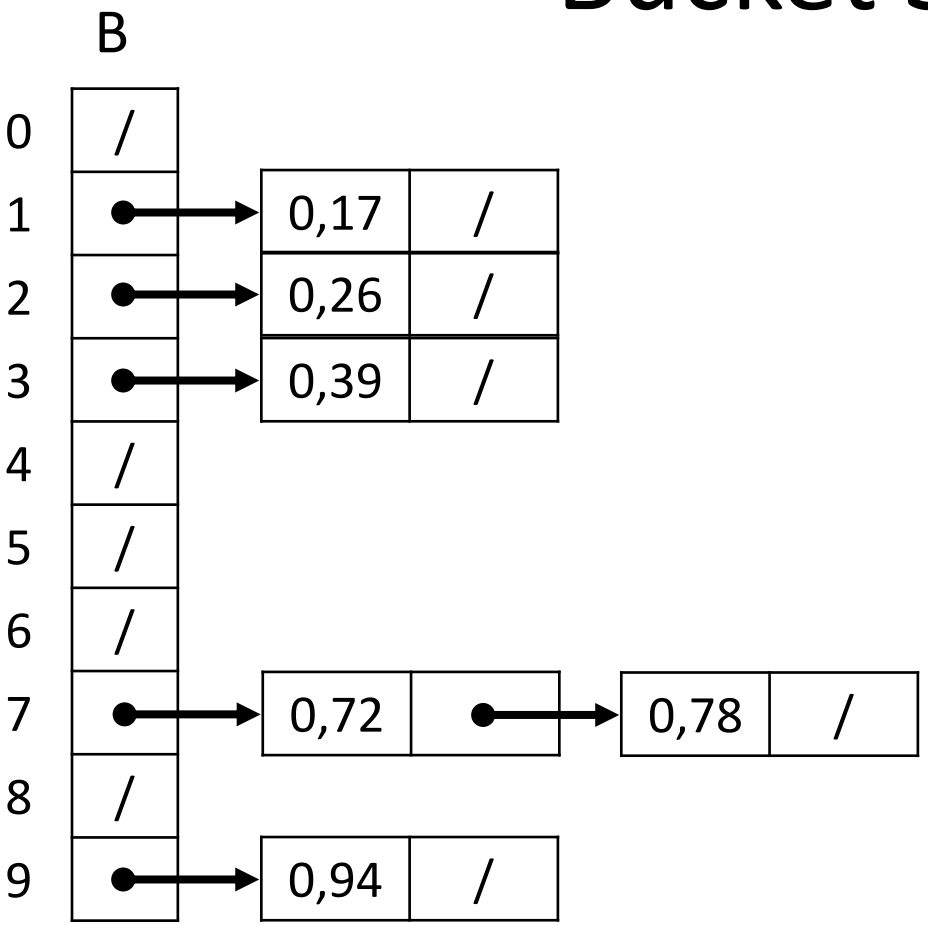
A	0,78	0,17	0,39	0,26	0,72	0,94	0,21	0,12	0,23	0,68

Bucket Sort



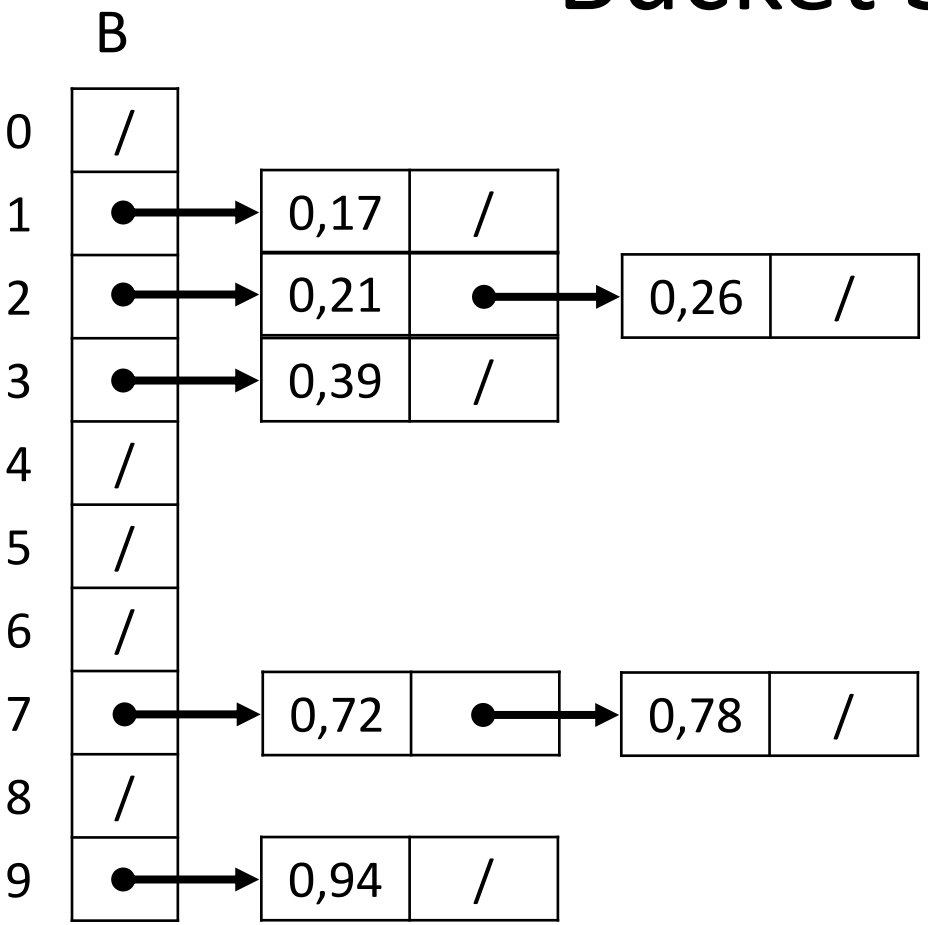
A	0,78	0,17	0,39	0,26	0,72	0,94	0,21	0,12	0,23	0,68

Bucket Sort



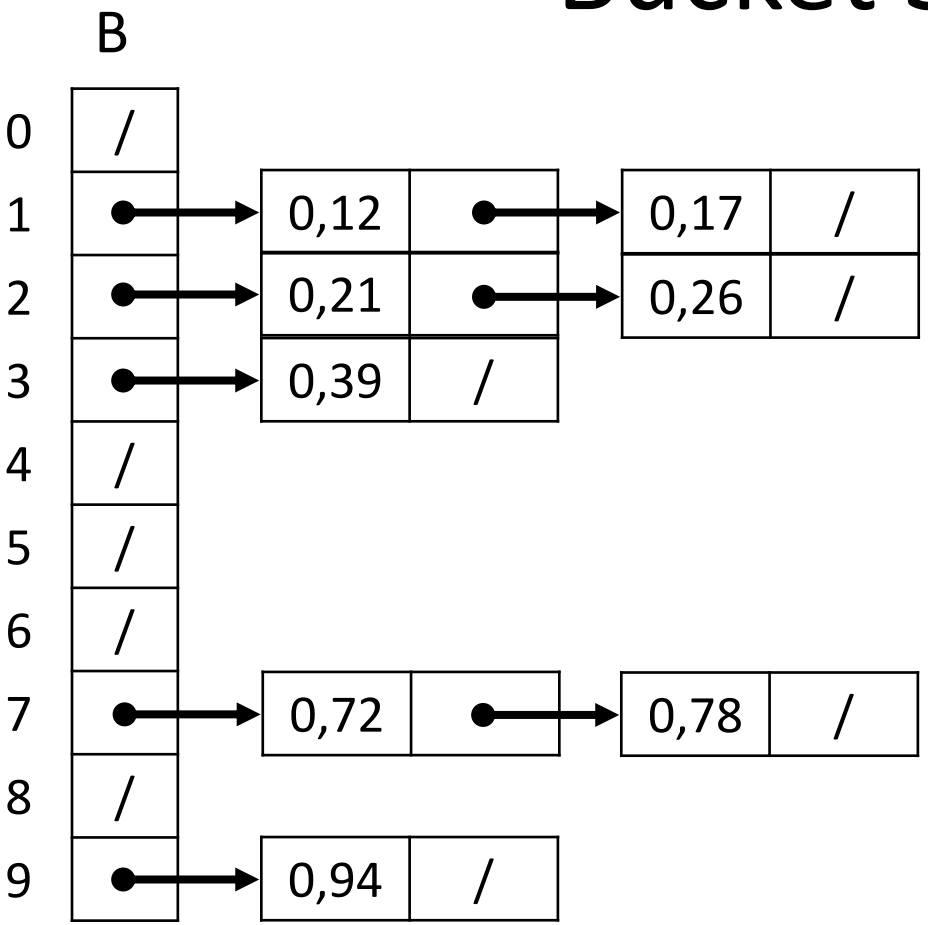
A	0,78	0,17	0,39	0,26	0,72	0,94	0,21	0,12	0,23	0,68

Bucket Sort



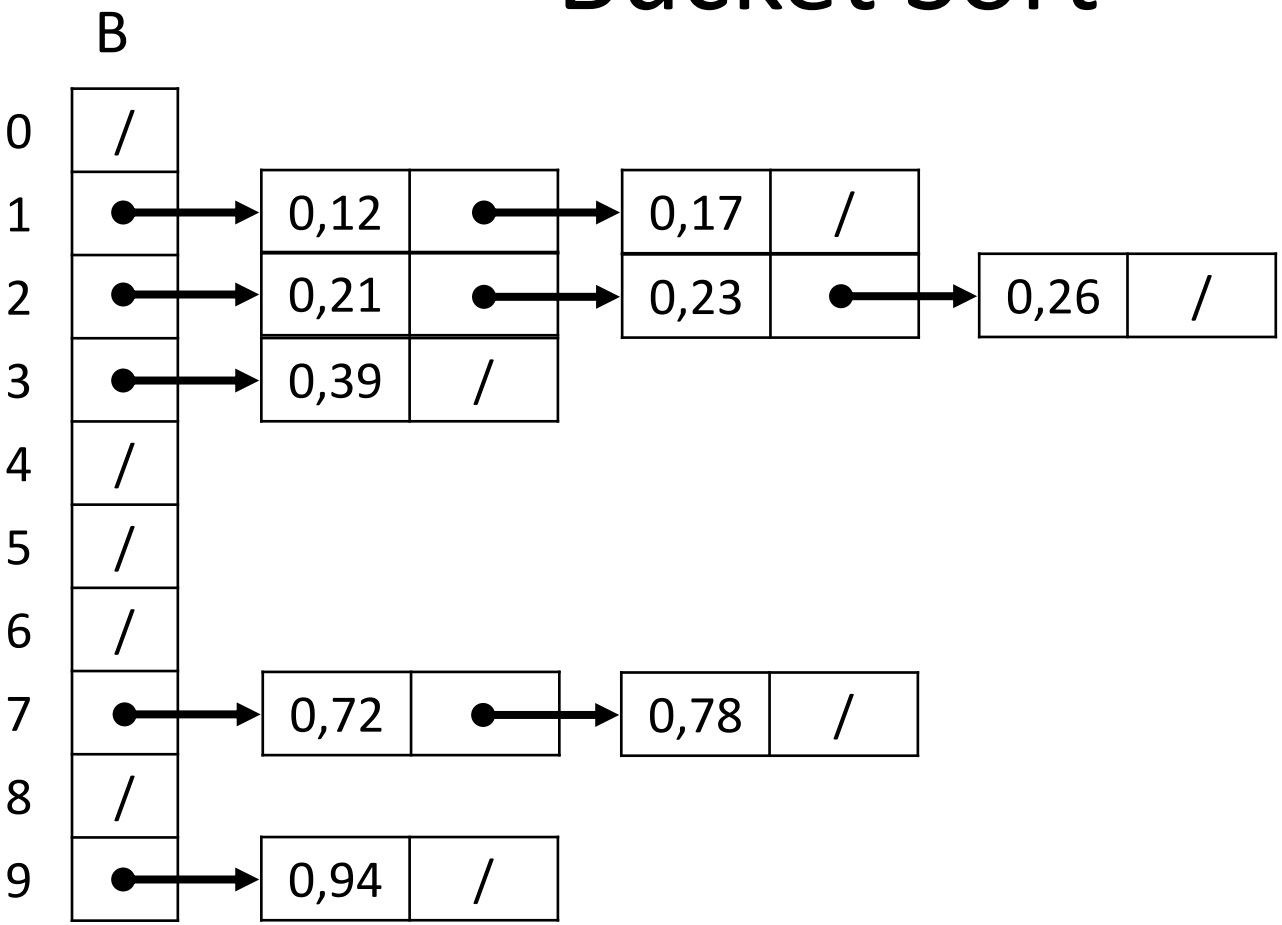
A	0,78	0,17	0,39	0,26	0,72	0,94	0,21	0,12	0,23	0,68

Bucket Sort



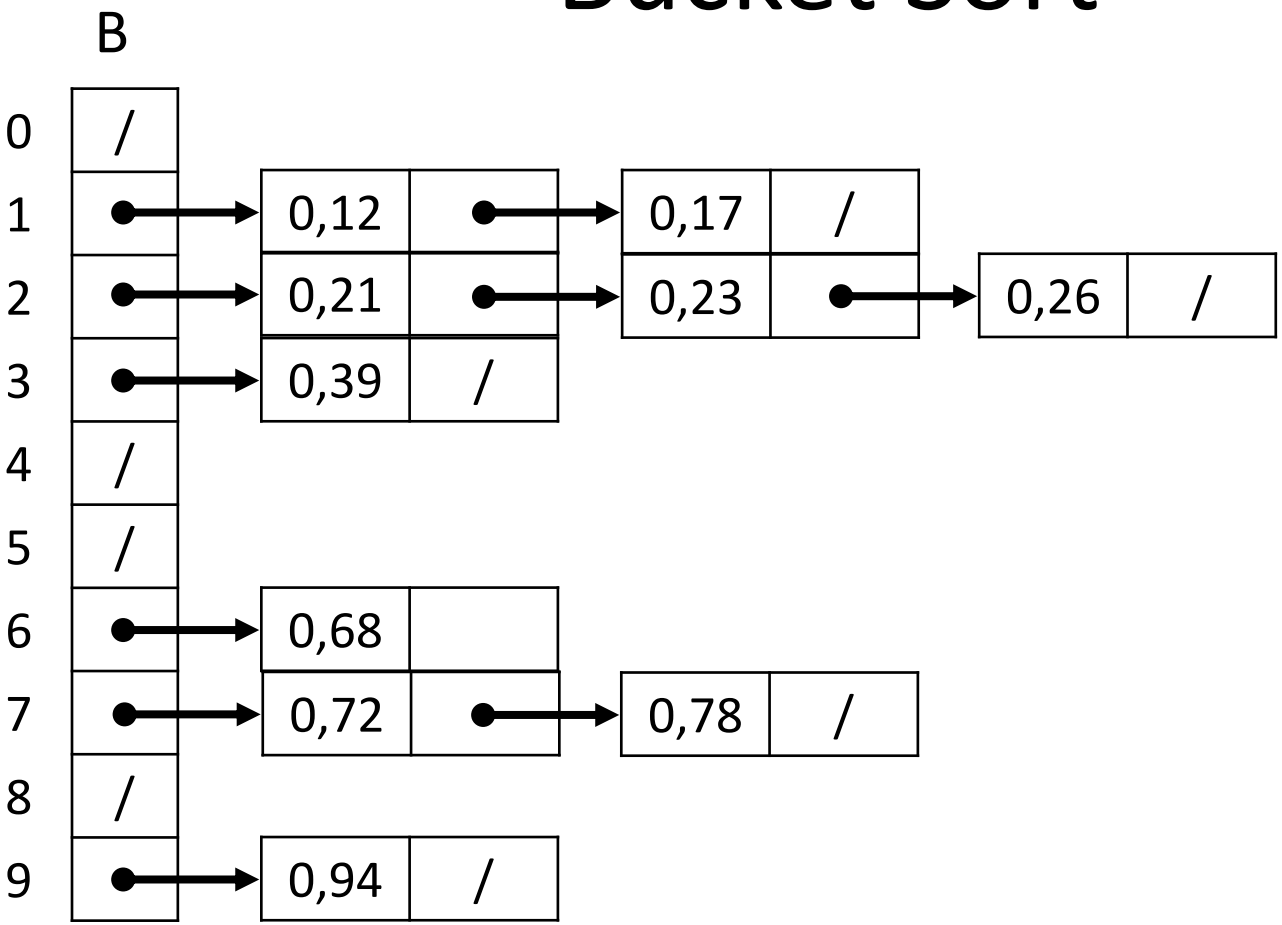
A	0,78	0,17	0,39	0,26	0,72	0,94	0,21	0,12	0,23	0,68

Bucket Sort



A	0,78	0,17	0,39	0,26	0,72	0,94	0,21	0,12	0,23	0,68

Bucket Sort



A

0,78	0,17	0,39	0,26	0,72	0,94	0,21	0,12	0,23	0,68

Bucket Sort – Complexidade

- Se o vetor estiver uniformemente distribuído:
  - Caso médio: **O(n + k)**

- Pior Caso: **$O(n^2)$**

- Bom quando o número de chaves é pequeno e há em média poucos elementos por balde.

Exercício

1) O algoritmo Counting Sort utiliza um vetor auxiliar C para armazenar o número de ocorrências de valores no vetor de entrada. Considerando vetor de entrada A = {2, 1, 5, 2, 4, 4, 5, 4, 3, 4, 1, 3, 0, 1, 3, 0}, o conteúdo armazenado no vetor C após a execução do Counting Sort é C = {0, 2, 5, 7, 11, 14}. Verdadeiro ou Falso? Justifique sua resposta apresentando os valores do vetor C durante as etapas do algoritmo.

Exercícios

Lista de Exercícios 11 – Algoritmos de Ordenação de Complexidade Linear

http://www.inf.puc-rio.br/~elima/paa/

Leitura Complementar

- Cormen, T., Leiserson, C., Rivest, R., e Stein, C. **Algoritmos – Teoria e Prática** (tradução da 2ª. Edição americana), Editora Campus, 2002.

- **Capítulo 8: Ordenação em Tempo Linear**