Projeto e Análise de Algoritmos

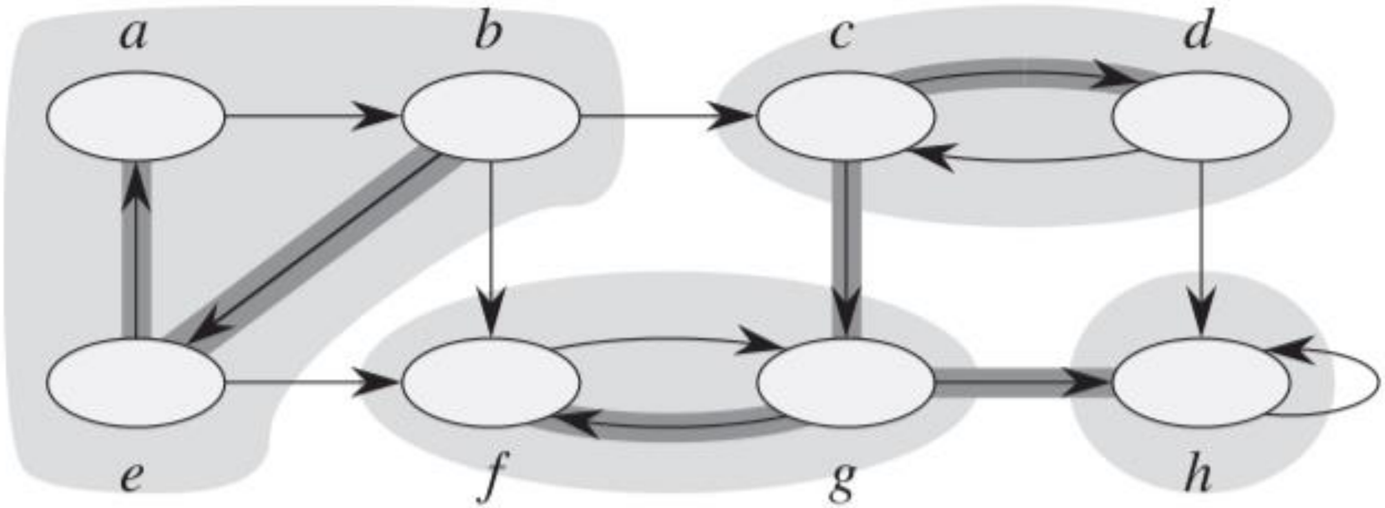
Aula 13 – Componentes Fortemente Conectados

Edirlei Soares de Lima

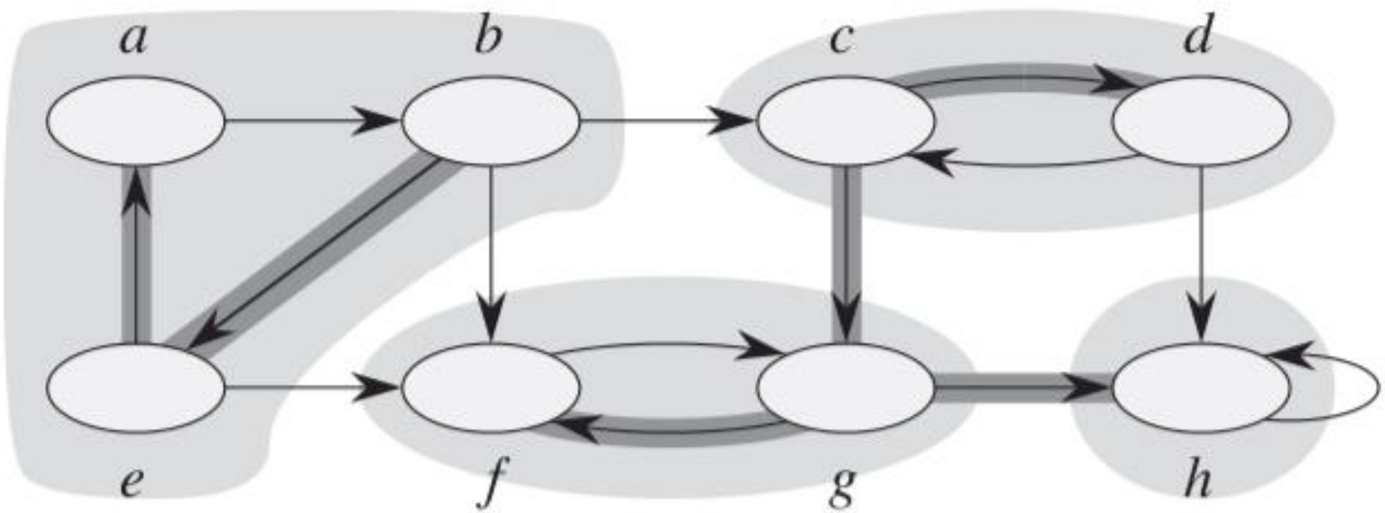
<edirlei@iprj.uerj.br>

Componentes Fortemente Conectados

- Um **componente fortemente conectado** (Strongly Connected Component - SCC) de um grafo orientado G= (V, A) é um conjunto máximo de vértices C ⊆ V, tal que, para todo par de vértice *u* e *v*:
  - $u \rightsquigarrow v$
  - $v \rightsquigarrow u$



Componentes Fortemente Conectados



- **Algoritmos:**
  - Algoritmo de Kosaraju;
  - Algoritmo de Tarjan;

Algoritmo de Kosaraju

1. Chama BuscaEmProfundidade(G) para obter os tempos de término t[u] para cada vértice u.

2. Obtem G^T (G transposto).

3. Chama BuscaEmProfundidade(G^T), realizando a busca a partir do vértice de maior t[u] obtido pela BuscaEmProfundidade(G).

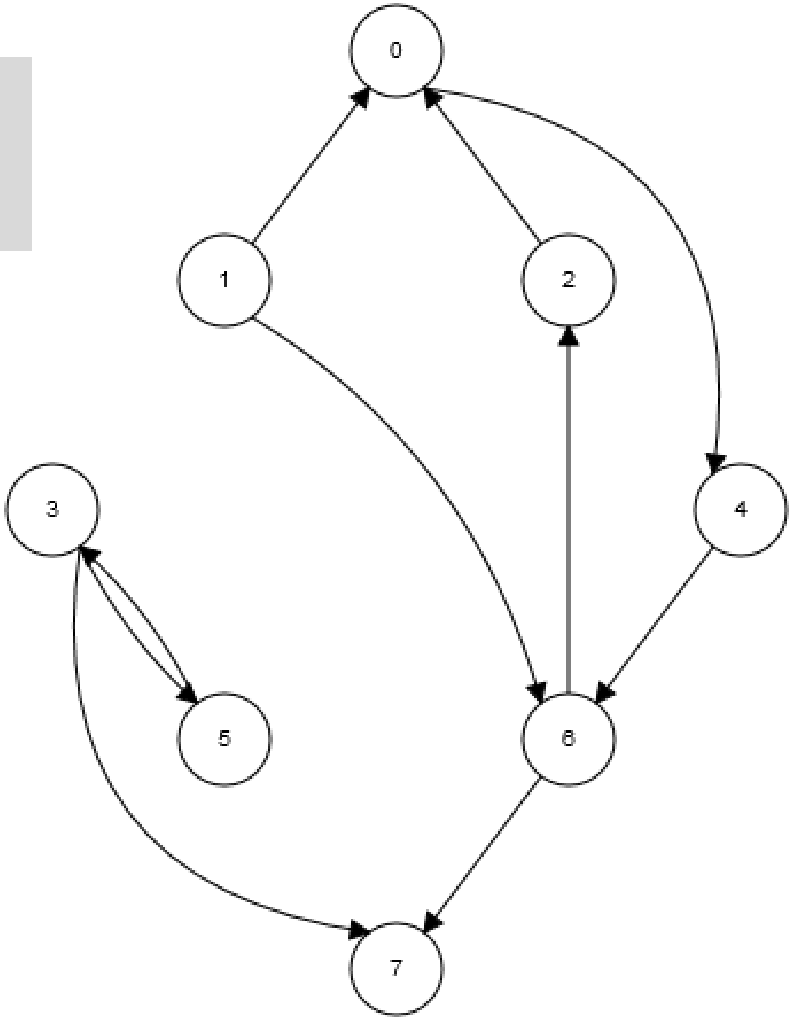
4. Enquanto houver vértices restantes, inicie uma nova busca em profundidade em G^T a partir do vértice de maior t[u] dentre os vértices restantes.

5. Retorne os vértices de cada árvore da floresta obtida como um componente fortemente conectado separado.

Algoritmo de Kosaraju

```
1. Chama BuscaEmProfundidade(G)
para obter os tempos de término
t[u] para cada vértice u.
```

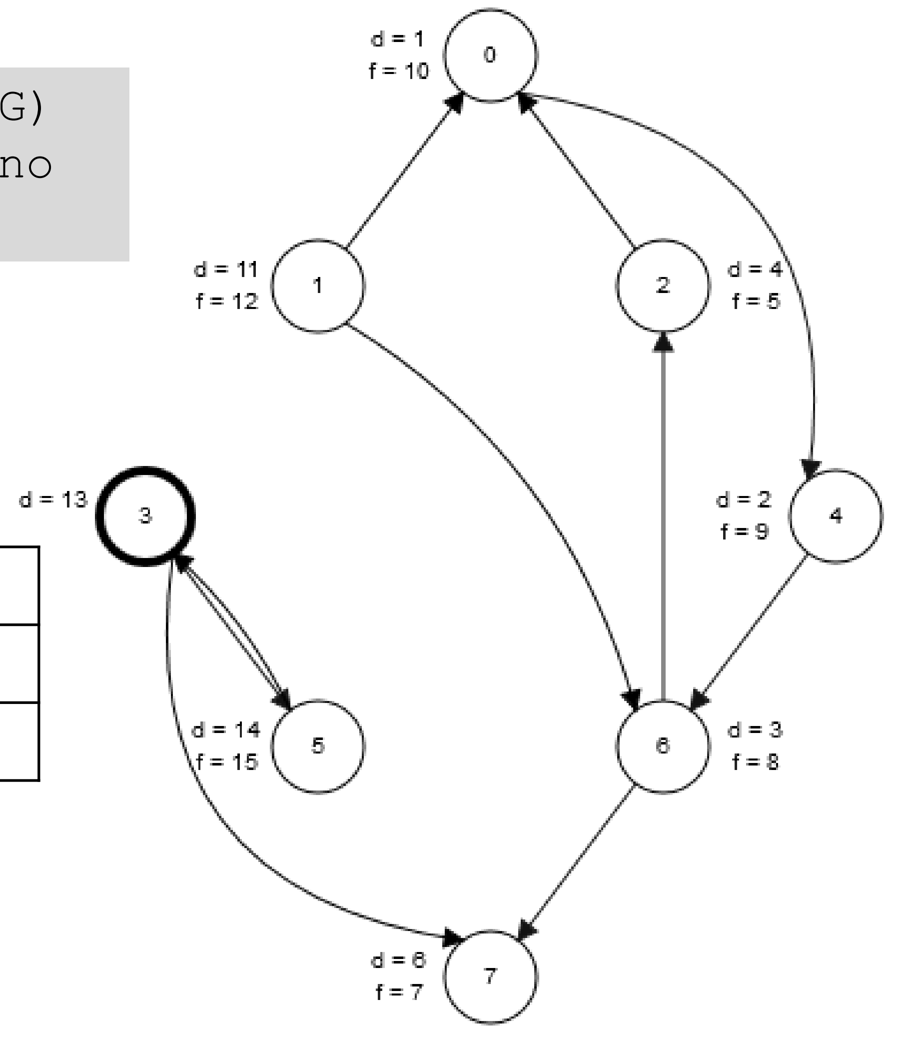
	0	1	2	3	4	5	6	7
c								
d								
f								



Algoritmo de Kosaraju

```
1. Chama BuscaEmProfundidade(G)
para obter os tempos de término
t[u] para cada vértice u.
```

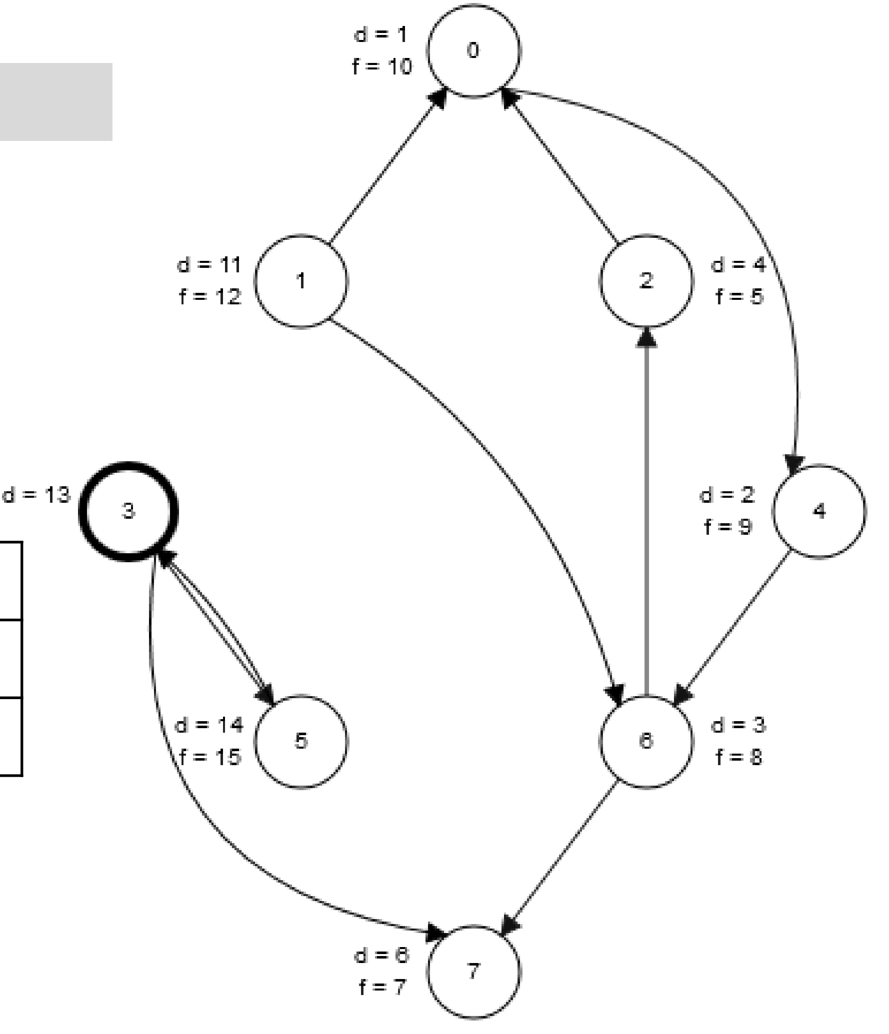
	0	1	2	3	4	5	6	7
c	b	b	b	b	b	b	b	b
d	1	11	4	13	2	14	3	6
f	10	12	5	16	9	15	8	7



Algoritmo de Kosaraju

`2. Obtem G^T (G transposto).`

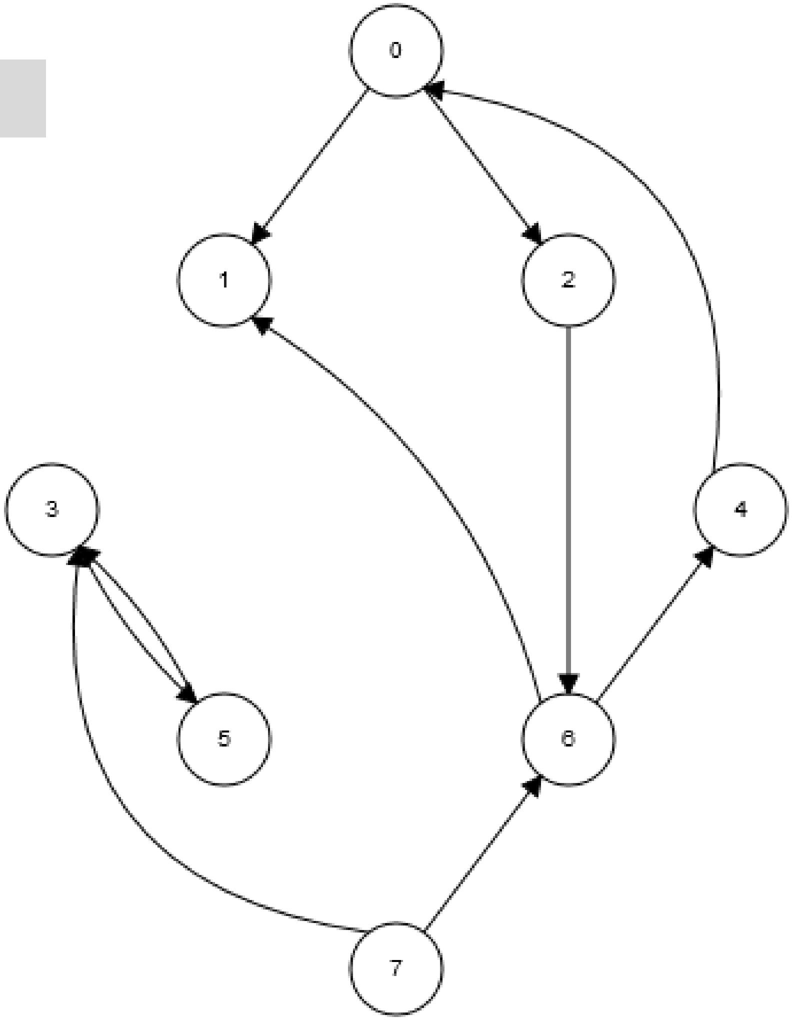
	0	1	2	3	4	5	6	7
c	b	b	b	b	b	b	b	b
d	1	11	4	13	2	14	3	6
f	10	12	5	16	9	15	8	7



Algoritmo de Kosaraju

2. Obtem G^T (G transposto).

	0	1	2	3	4	5	6	7
c	b	b	b	b	b	b	b	b
d	1	11	4	13	2	14	3	6
f	10	12	5	16	9	15	8	7

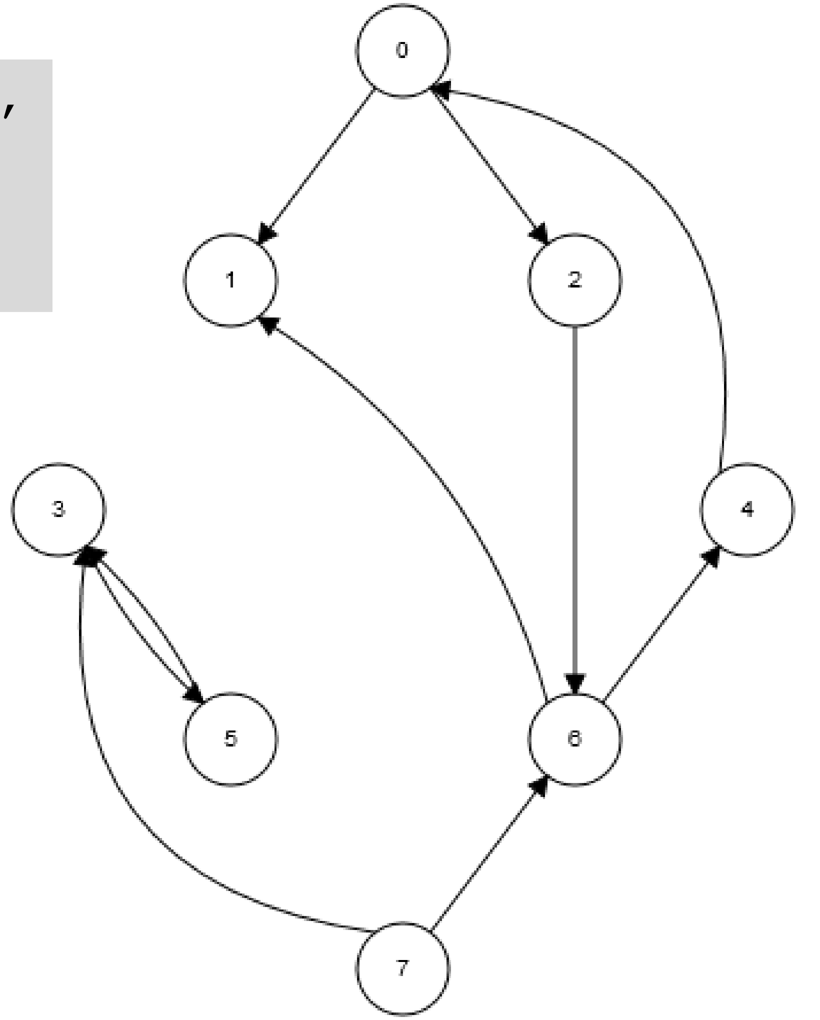


Algoritmo de Kosaraju

3. Chama BuscaEmProfundidade(G^T), realizando a busca a partir do vértice de maior t[u] obtido pela BuscaEmProfundidade(G).

	0	1	2	3	4	5	6	7
c	b	b	b	b	b	b	b	b
d	1	11	4	13	2	14	3	6
f	10	12	5	16	9	15	8	7

f								

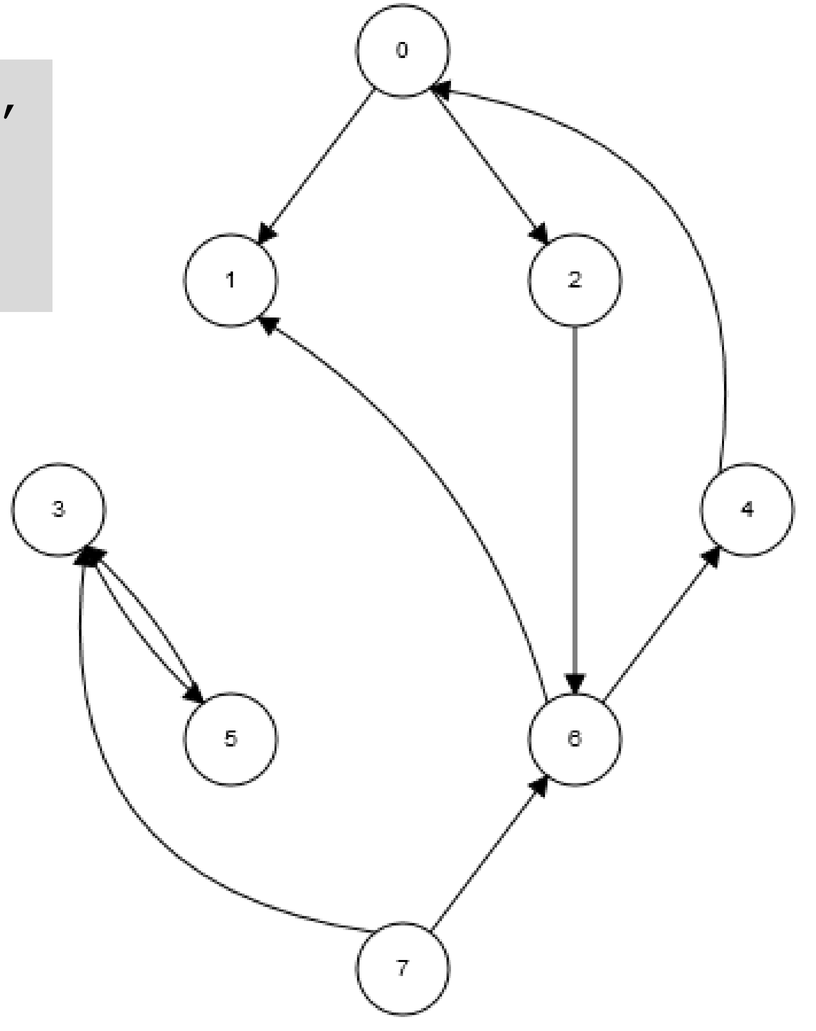


Algoritmo de Kosaraju

3. Chama BuscaEmProfundidade(G^T), realizando a busca a partir do vértice de maior t[u] obtido pela BuscaEmProfundidade(G).

	0	1	2	3	4	5	6	7
c	b	b	b	b	b	b	b	b
d	1	11	4	13	2	14	3	6
f	10	12	5	16	9	15	8	7

	3	5	1	0	4	6	7	2
f	16	15	12	10	9	8	7	5

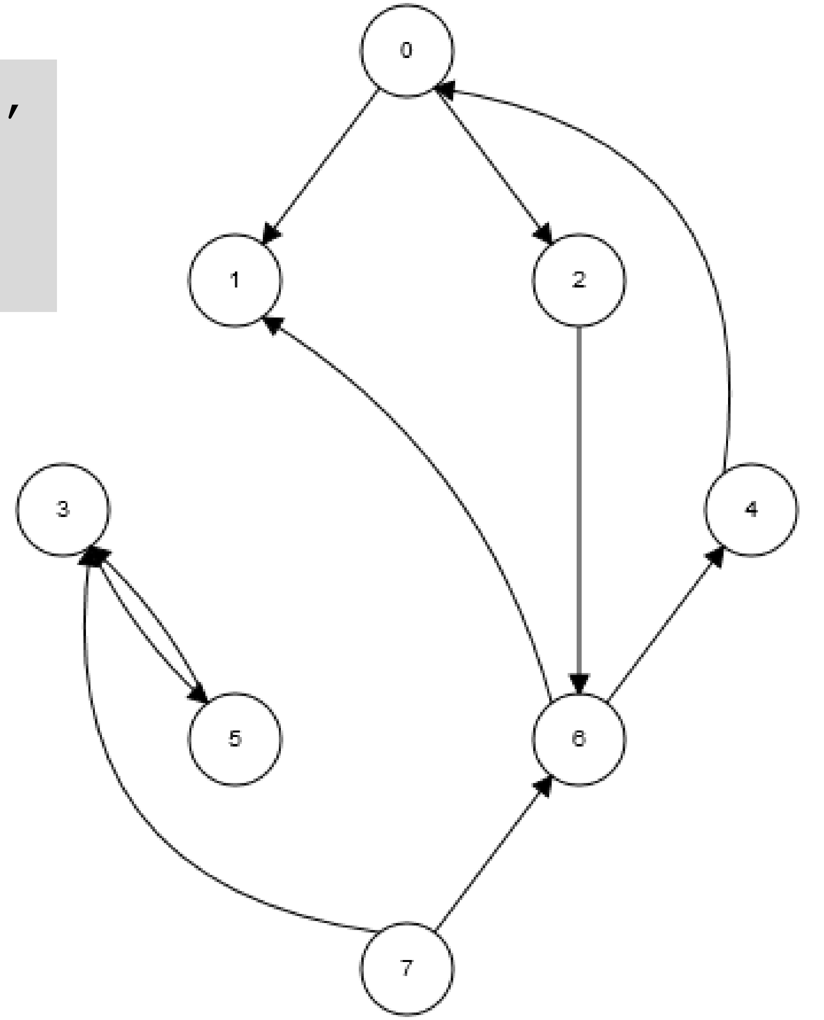


Algoritmo de Kosaraju

3. Chama BuscaEmProfundidade(G^T), realizando a busca a partir do vértice de maior t[u] obtido pela BuscaEmProfundidade(G).

	0	1	2	3	4	5	6	7
c								
d								
f								

	3	5	1	0	4	6	7	2
f	16	15	12	10	9	8	7	5

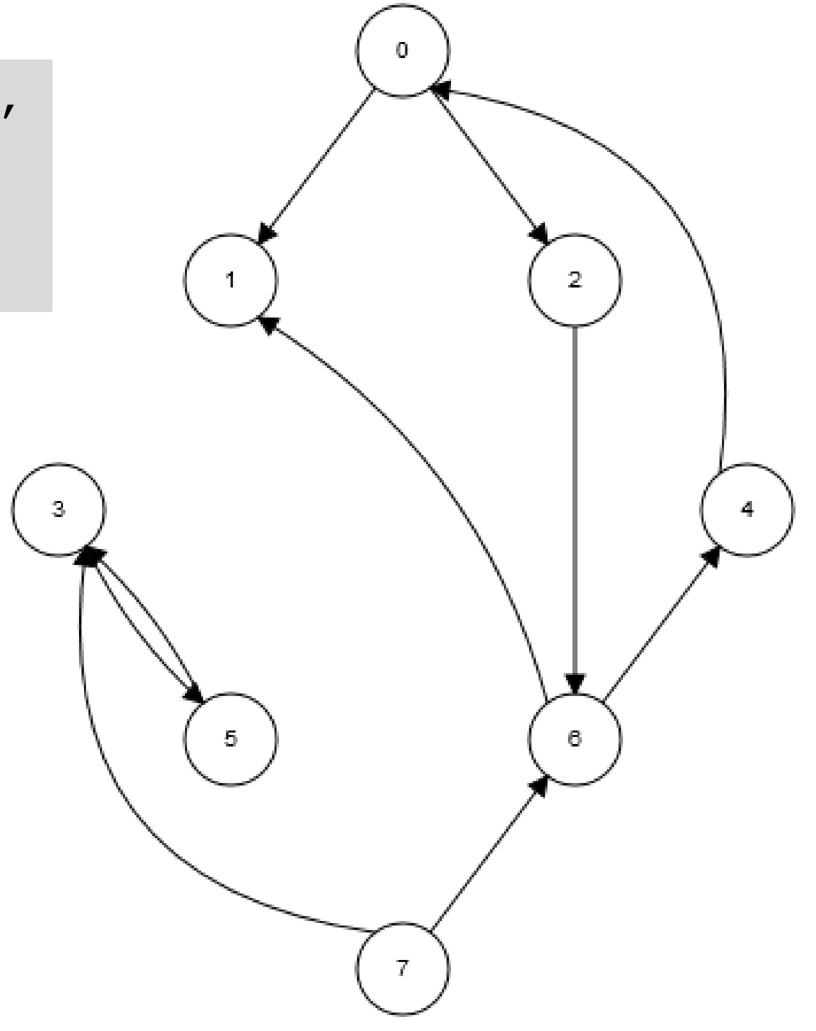


Algoritmo de Kosaraju

3. Chama BuscaEmProfundidade(G^T), realizando a busca a partir do vértice de maior t[u] obtido pela BuscaEmProfundidade(G).

	0	1	2	3	4	5	6	7
c				b		b		
d				1		2		
f				4		3		

	3	5	1	0	4	6	7	2
f	16	15	12	10	9	8	7	5

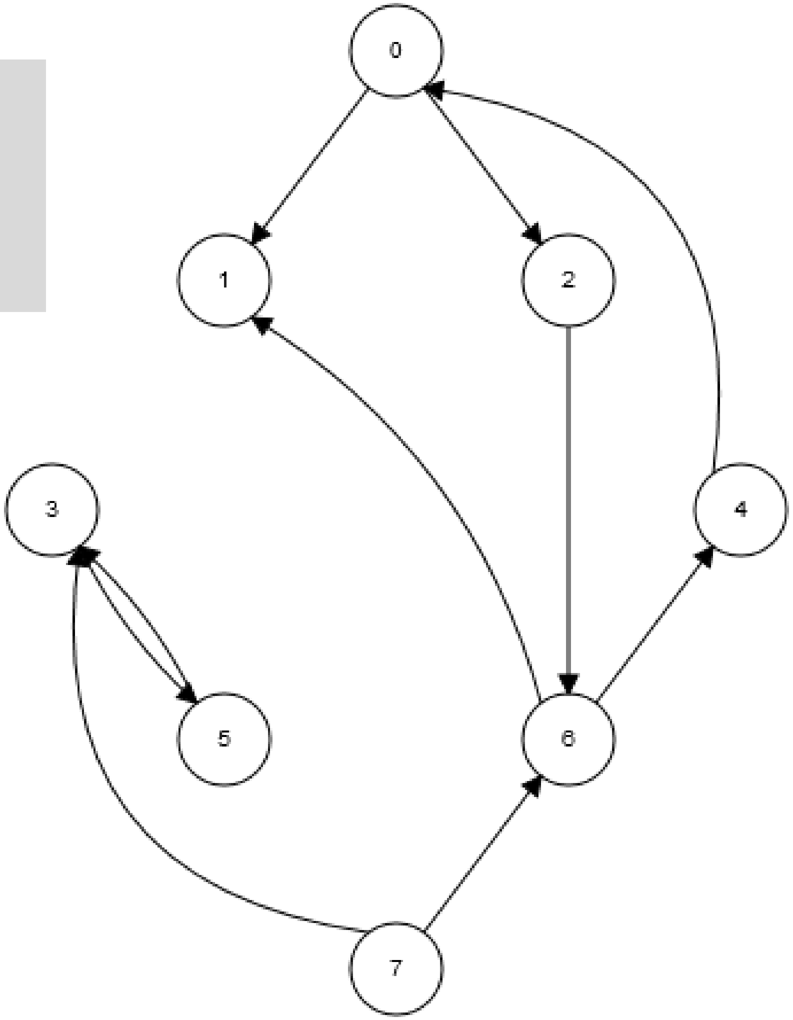


Algoritmo de Kosaraju

5. Retorne os vértices de cada árvore da floresta obtida como um componente fortemente conectado separado.

	0	1	2	3	4	5	6	7
c				b		b		
d				1		2		
f				4		3		

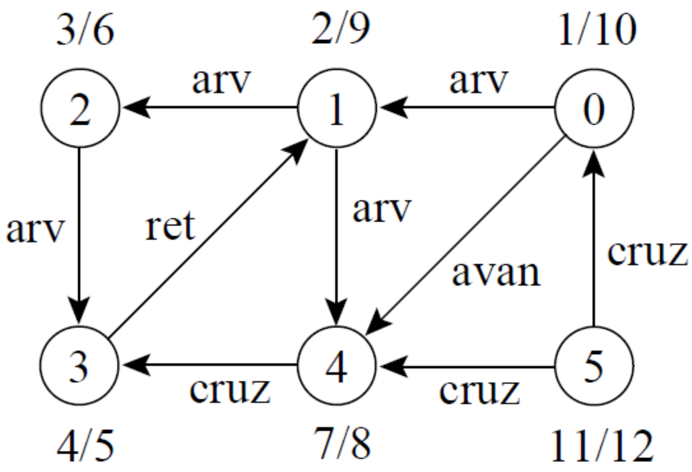
	3	5	1	0	4	6	7	2
f	16	15	12	10	9	8	7	5



Classificação de Arestas

- Classificação de arestas pode ser útil para derivar outros algoritmos.

- Na busca em profundidade cada aresta pode ser classificada pela cor do vértice que é alcançado pela primeira vez:
  - Branco indica uma **aresta de árvore**.
  - Cinza indica uma **aresta de retorno**.
  - Preto indica uma **aresta de avanço** quando u é descoberto antes de v ou uma **aresta de cruzamento** caso contrário.

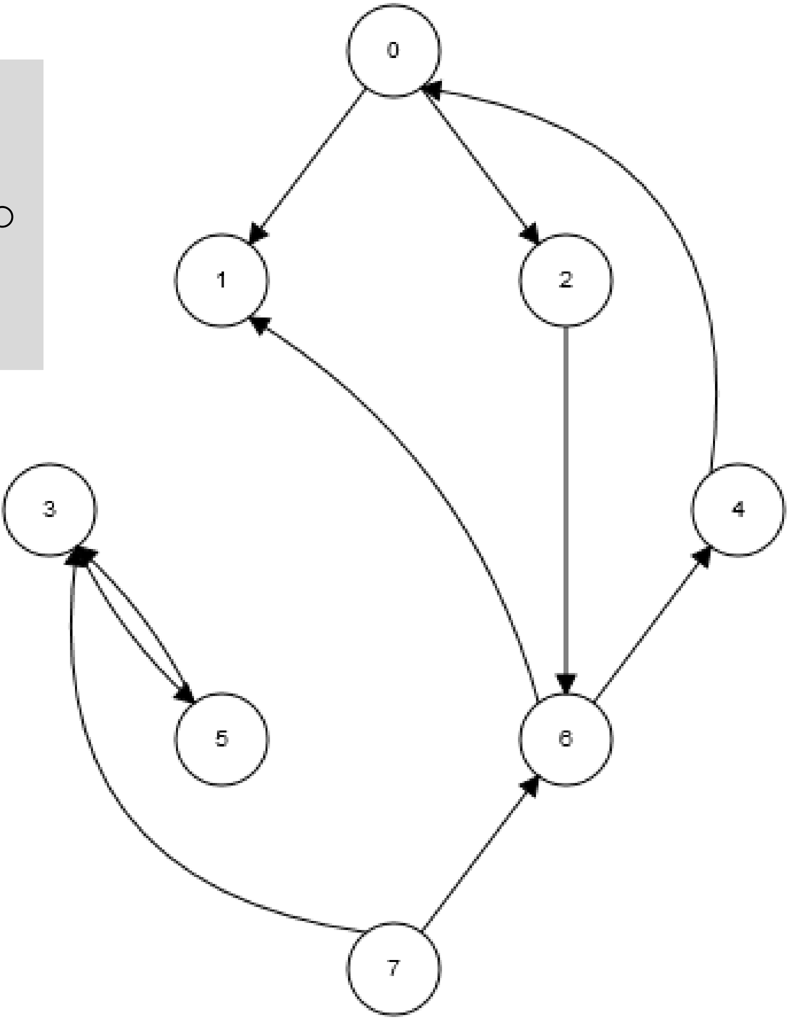


Algoritmo de Kosaraju

```
4. Enquanto houver vértices
restantes, inicie uma nova busca
em profundidade em G^T a partir do
vértice de maior t[u] dentre os
vértices restantes.
```

	0	1	2	3	4	5	6	7
c				b		b		
d				1		2		
f				4		3		

	3	5	1	0	4	6	7	2
f	16	15	12	10	9	8	7	5

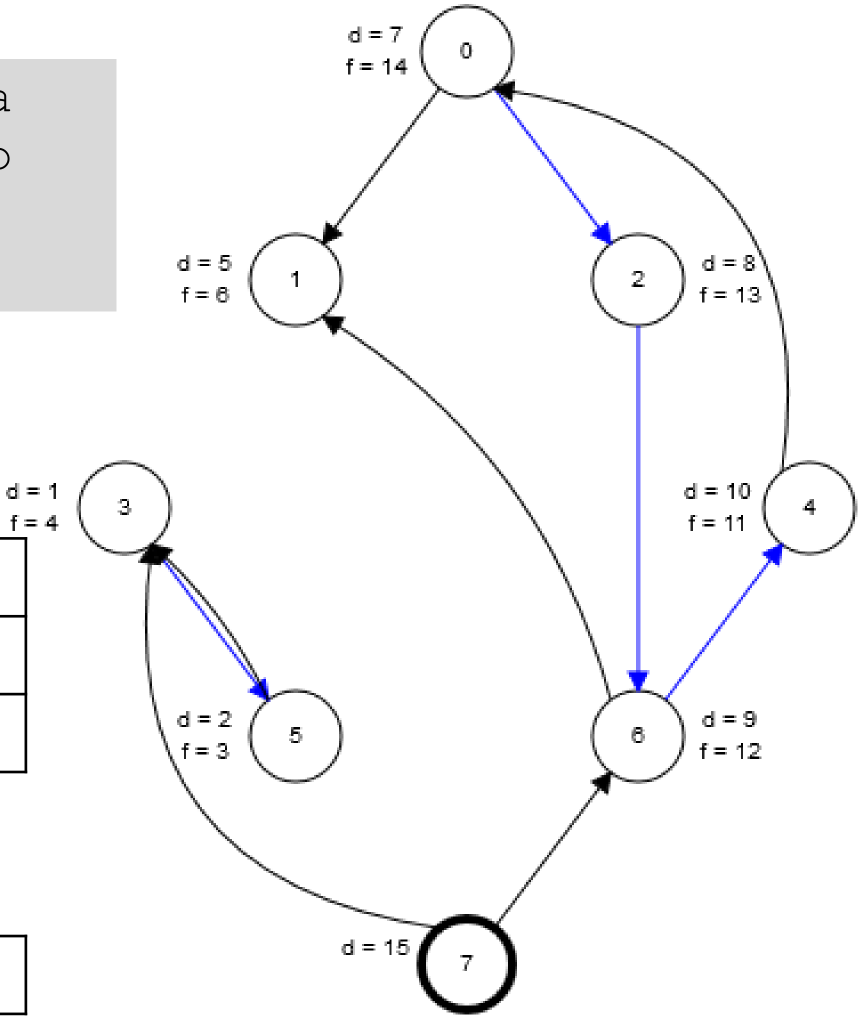


Algoritmo de Kosaraju

5. Retorne os vértices de cada árvore da floresta obtida como um componente fortemente conectado separado.

	0	1	2	3	4	5	6	7
c	b	b	b	b	b	b	b	b
d	7	5	8	1	10	2	9	15
f	14	6	13	4	11	3	12	16

	3	5	1	0	4	6	7	2
f	16	15	12	10	9	8	7	5



Algoritmo de Kosaraju – Análise

```
1. Chama BuscaEmProfundidade(G) para obter os
tempos de término t[u] para cada vértice u.

2. Obtem GT  (G transposto).

3. Chama BuscaEmProfundidade(GT), realizando
a busca a partir do vértice de maior t[u]
obtido pela BuscaEmProfundidade(G).

4. Enquanto houver vértices restantes, inicie
uma nova busca em profundidade em GT a partir
do vértice de maior t[u] dentre os vértices
restantes.

5. Retorne os vértices de cada árvore da
floresta obtida como um componente fortemente
conectado separado.
```

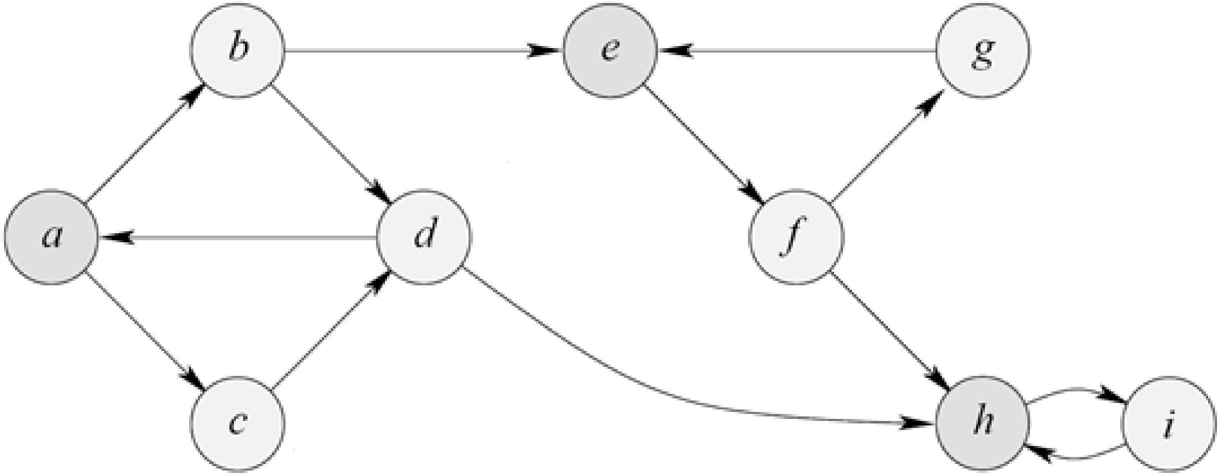
O(V + A)

Algoritmo de Tarjan

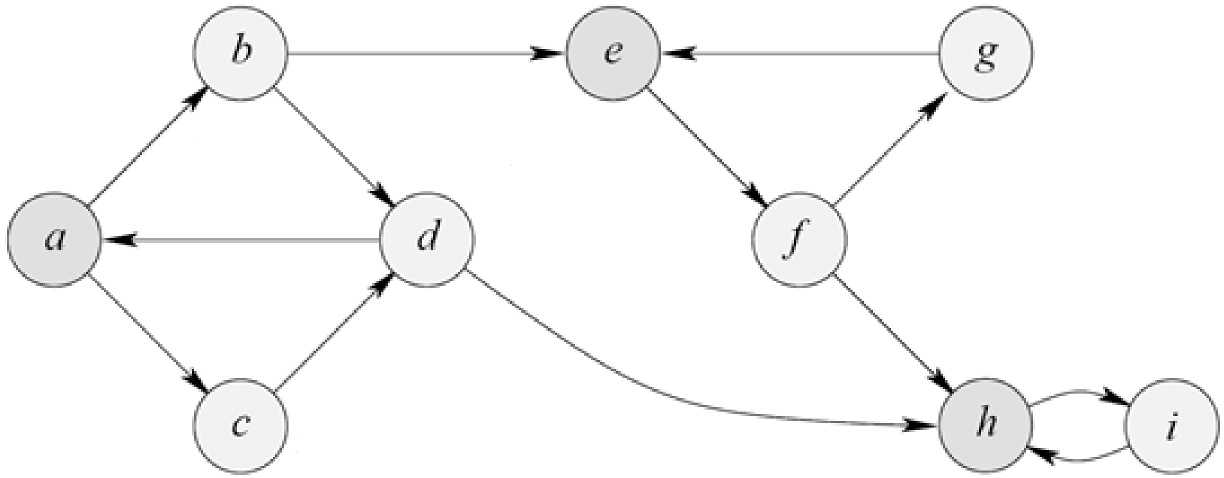
```
1. Chamar BuscaEmProfundidade(G).

  2. Ao visitar um vértice v, coloca-lo em uma pilha S;

  3. Calcular e guardar os valores de d[v] e low[v];

     d[v]: Número de vértices visitados quando v é descoberto;

     low[v]: O menor valor de d[] ou low[] atingível por uma
             aresta de retorno na árvore de v;

  4. Se ao concluir a exploração de um vértice v d[v] = low[v],
     então v é "raíz" de um componente fortemente conectado.
     Nesse caso retirar tudo o que está na pilha S até v e
     reportar esses elementos como um componente fortemente
     conectado;
```

Algoritmo de Tarjan

```
1. Chamar BuscaEmProfundidade(G).
```



Algoritmo de Tarjan



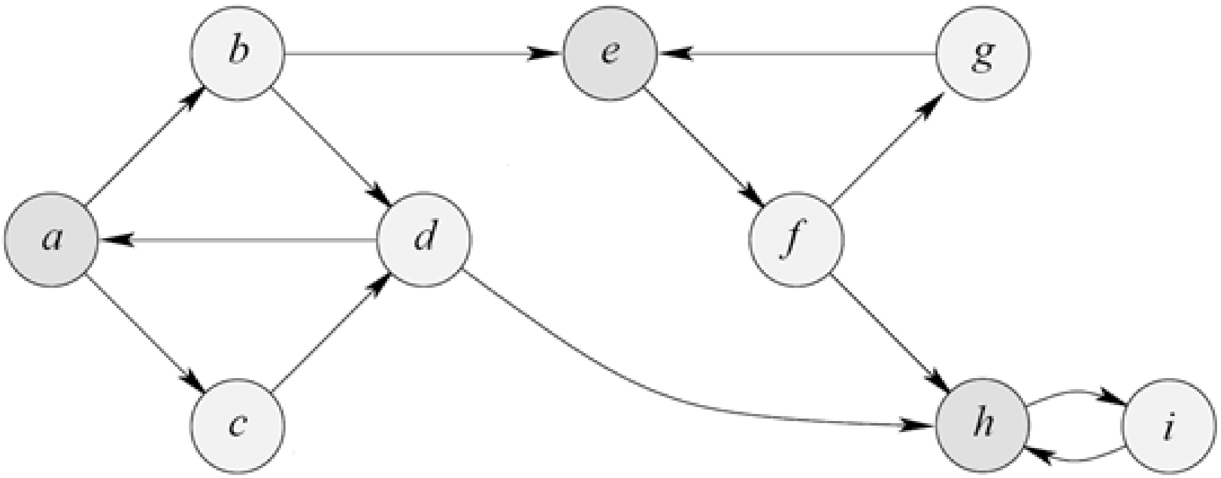
2. Ao visitar um vértice *v*, coloca-lo em uma pilha S;

3. Calcular e guardar os valores de d[*v*] e low[*v*];

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
c									
d									
low									

S									

Algoritmo de Tarjan

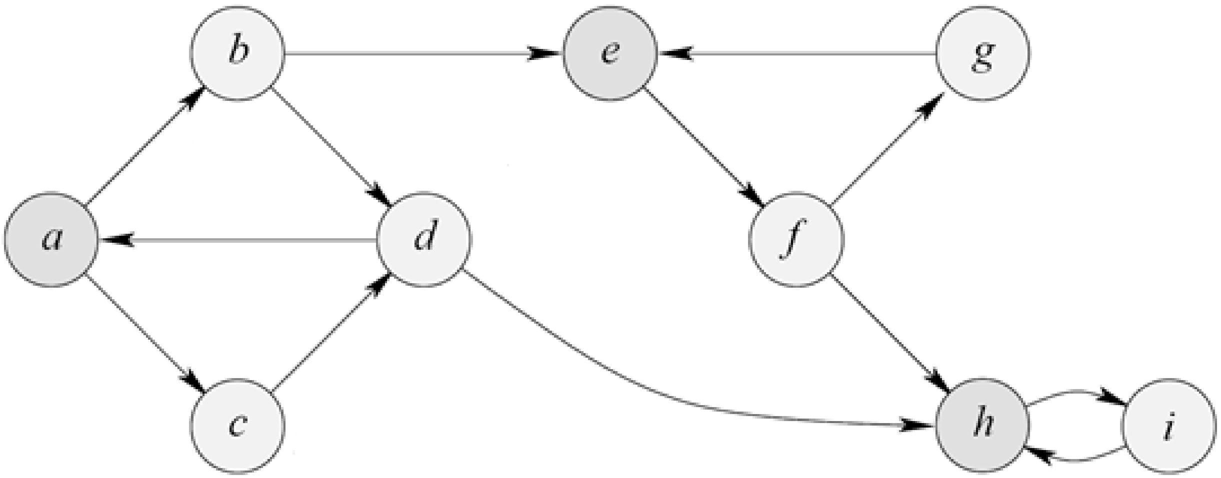


4. Se ao concluir a exploração de um vértice *v* d[*v*] = low[*v*], então *v* é raíz de um componente fortemente conectado. Nesse caso retirar tudo o que está na pilha S até v e reportar esses elementos como um componente fortemente conectado;

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
c	g	g	w	w	g	g	b	b	b
d	0	1			2	3	4	5	6
low							2	5	5

S	a	b	e	f	g	h	i		

Algoritmo de Tarjan

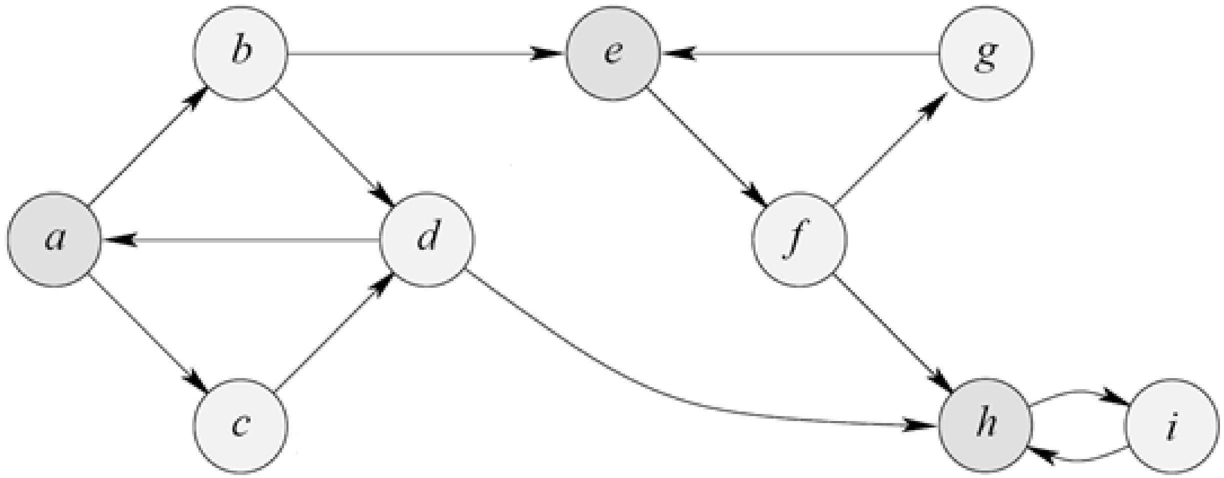


4. Se ao concluir a exploração de um vértice *v* d[*v*] = low[*v*], então *v* é raíz de um componente fortemente conectado. Nesse caso retirar tudo o que está na pilha S até v e reportar esses elementos como um componente fortemente conectado;

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
c	g	g	w	w	b	b	b	b	b
d	0	1			2	3	4	5	6
low					2	2	2	5	5

S	a	b	e	f	g				

Algoritmo de Tarjan

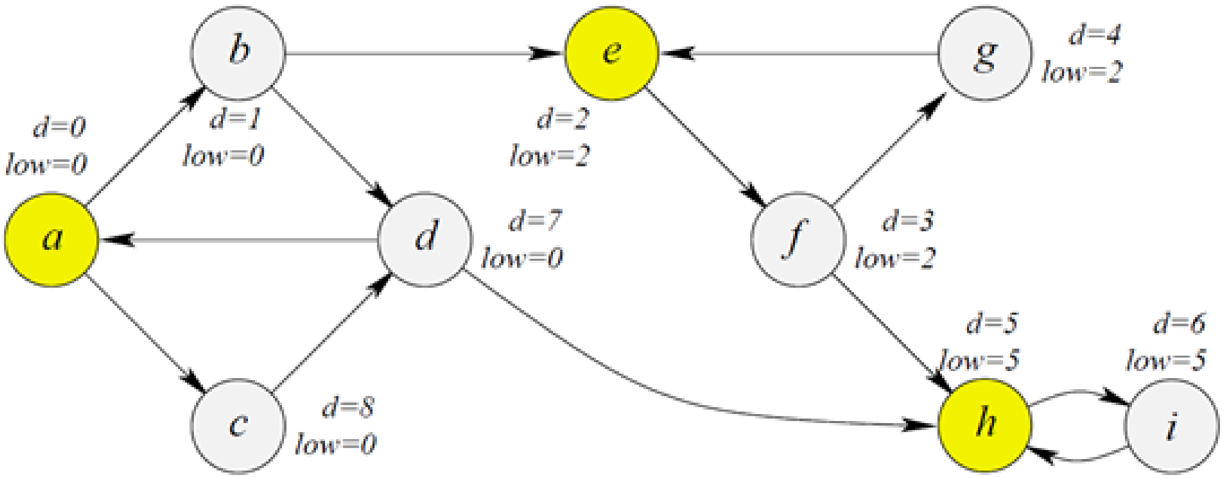


4. Se ao concluir a exploração de um vértice v $d[v] = low[v]$, então v é raíz de um componente fortemente conectado. Nesse caso retirar tudo o que está na pilha S até v e reportar esses elementos como um componente fortemente conectado;

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
c	b	b	b	b	b	b	b	b	b
d	0	1	8	7	2	3	4	5	6
low	0	0	0	0	2	2	2	5	5

S	a	b	d	c					

Algoritmo de Tarjan



	a	b	c	d	e	f	g	h	i
c	b	b	b	b	b	b	b	b	b
d	0	1	8	7	2	3	4	5	6
low	0	0	0	0	2	2	2	5	5

Algoritmo de Tarjan – Análise

```
1. Chamar BuscaEmProfundidade(G).

  2. Ao visitar um vértice v, coloca-lo em
     uma pilha S;

  3. Calcular e guardar os valores de d[v]
     e low[v];

  4. Se ao concluir a exploração de um
     vértice v d[v] = low[v], então v é
     "raíz" de um componente fortemente
     conectado. Nesse caso retirar tudo o
     que está na pilha S até v e reportar
     esses elementos como um componente
     fortemente conectado;
```

O(V + A)

Aplicações

- Encontrar grupos de pessoas relacionadas em redes sociais;
  - Sistemas de recomendação;

- Resolver problemas de 2-satisfiability (2-SAT);

- Algoritmo de model checking;

Exercícios

Lista de Exercícios 14 – Componentes Fortemente Conectados

http://www.inf.puc-rio.br/~elima/paa/

Leitura Complementar

- Halim e Halim. **Competitive Programming**, 3rd Edition, 2003.

- **Capítulo 4: Graph**

- Cormen, Leiserson, Rivest e Stein. **Algoritmos – Teoria e Prática**, 2ª. Edição, Editora Campus, 2002.

- **Capítulo 22: Algoritmos Elementares de Grafos**