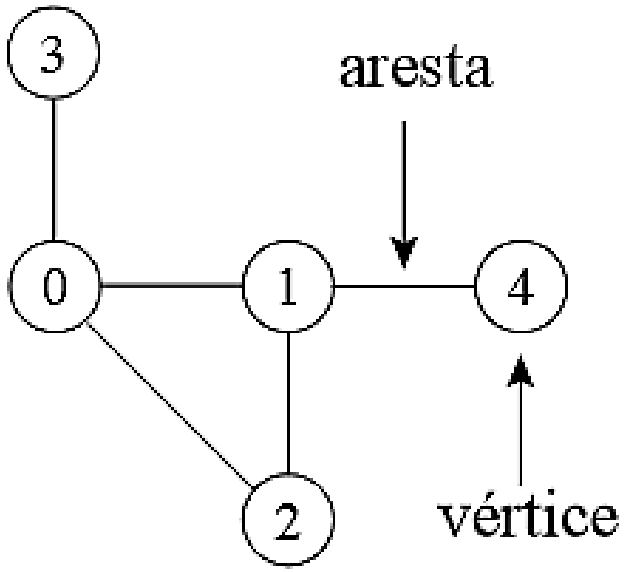
Projeto e Análise de Algoritmos

Aula 11 – Busca em Profundidade e Busca em Largura

Edirlei Soares de Lima
<edirlei@iprj.uerj.br>

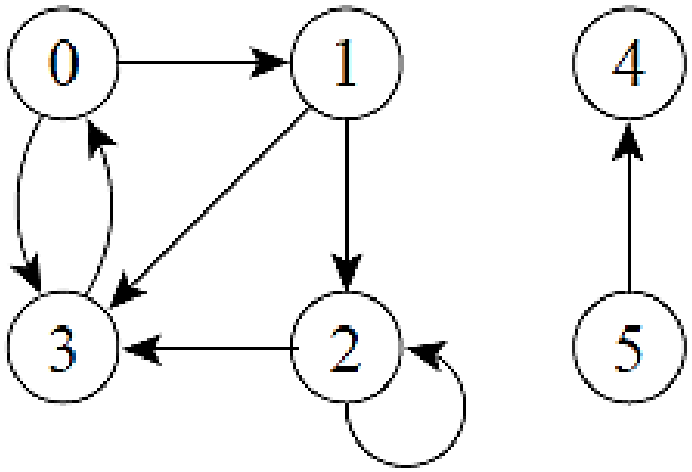
Grafos (Revisão)

- **G = (V, A)**
  - G: grafo;
  - V: conjunto de vértices;
  - A: conjunto de arestas;



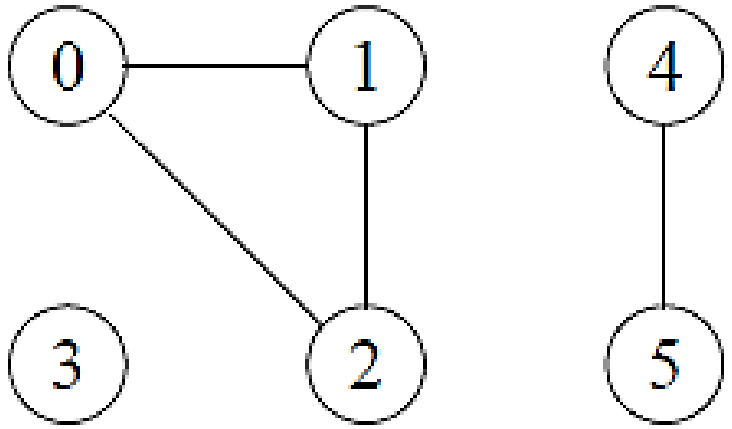
Grafos (Revisão)

- **Grafos Direcionados**
  - Uma aresta (*u*, *v*) sai do vértice *u* e entra no vértice *v*.
    - O vértice v é adjacente ao vértice u.
  - Podem existir arestas de um vértice para ele mesmo, chamadas de self-loops.



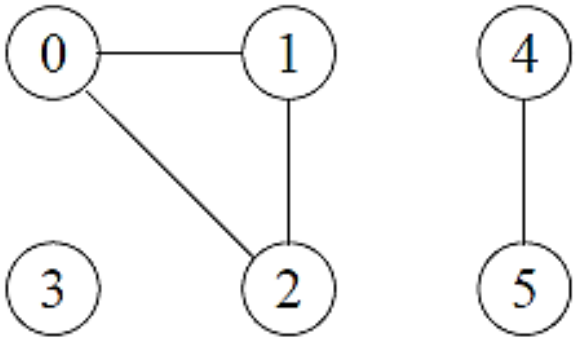
Grafos (Revisão)

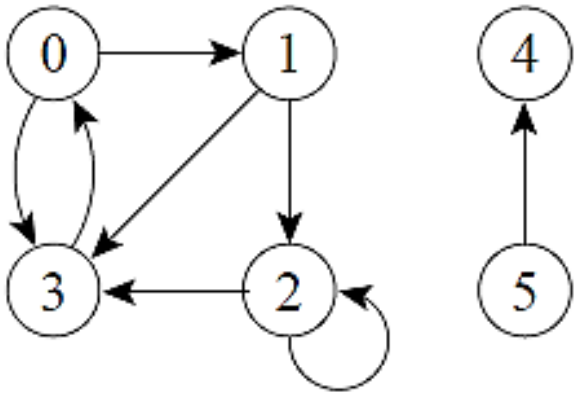
- **Grafos Não Direcionados**
  - As arestas (*u*, *v*) e (*v*, *u*) são consideradas como uma única aresta. A relação de adjacência é simétrica.
  - Self-loops não são permitidos.



Grafos (Revisão)

- **Grau de um Vértice**
  - **Em grafos não direcionados:** é o número de arestas que incidem nele.
  - **Em grafos direcionados:** é o número de arestas que saem dele (out-degree) mais o número de arestas que chegam nele (in-degree).
  - Um vérice de grau zero é dito **isolado** ou **não conectado**.



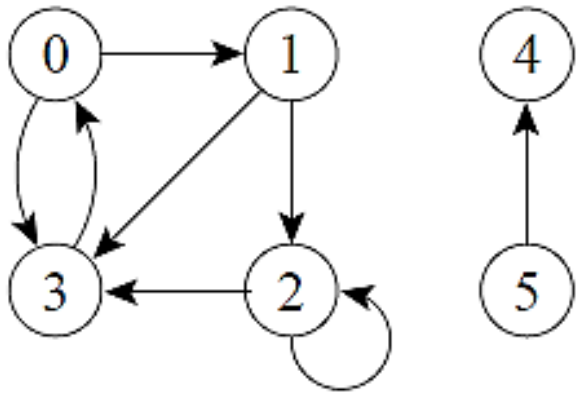


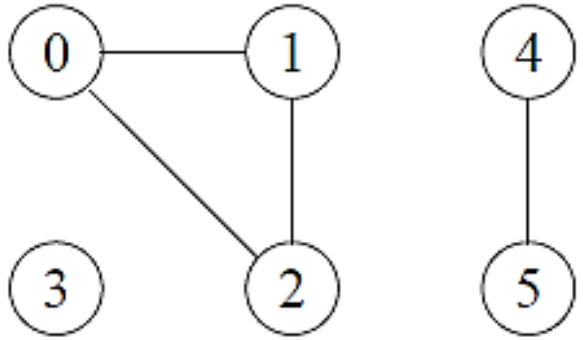
Grafos (Revisão)

- **Caminho entre Vértices**
  - Um caminho de comprimento *k* de um vértice *x* a um vértice *y* em um grafo G = (V, A) é uma sequência de vértices (v_0, v_1, v_2, ... , v_k) tal que $x = v_0$ e $y = v_k$, e $v_i \in V$ para $i = 1, 2, \ldots, k$.
  - O comprimento de um caminho é o número de arestas nele, isto é, o caminho contém os vértices v_0, v_1, v_2, ... , v_k e as arestas (v_0, v_1), (v_1, v_2), ... , (v_{k-1}, v_k).
  - Se existir um caminho *c* de *x* a *y* então *y* é **alcançável** a partir de *x* via *c*.

Grafos (Revisão)

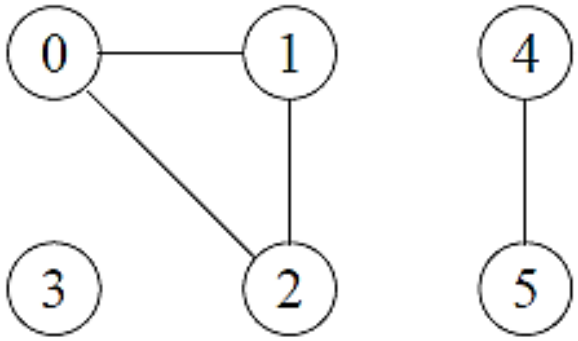
- **Ciclos**
  - **Em um grafo direcionado:** um caminho (v_0, v_1, ... , v_k) forma um ciclo se $v_0 = v_k$ e o caminho contém pelo menos uma aresta.
    - O *self-loop* é um ciclo de tamanho 1.
  - **Em um grafo não direcionado:** um caminho (v_0, v_1, ... , v_k) forma um ciclo se $v_0 = v_k$ e o caminho contém pelo menos três arestas.





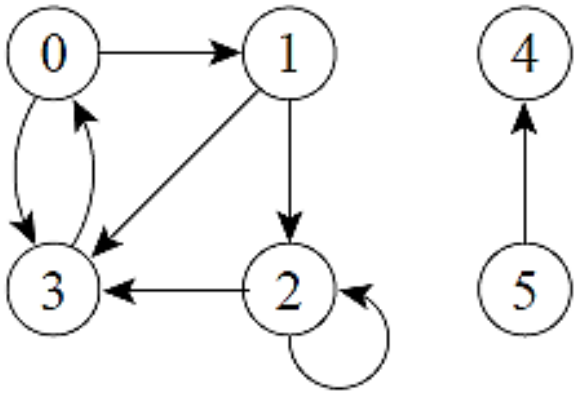
Grafos (Revisão)

- **Componentes Conectados**
  - Um grafo não direcionado é **conectado** se cada par de vértices está conectado por um caminho.
  - Os **componentes conectados** são as porções conectadas de um grafo.
  - Um grafo não direcionado é conectado se ele tem exatamente **um componente conectado**.



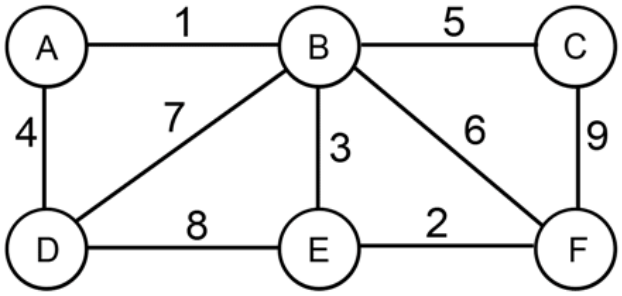
Grafos (Revisão)

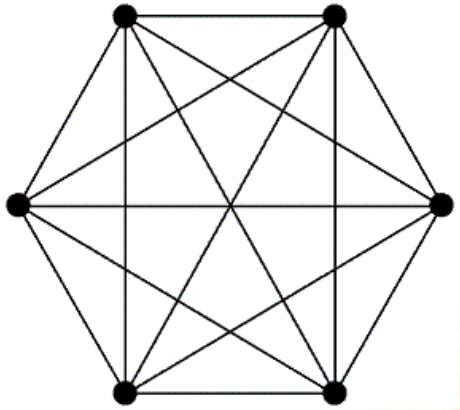
- **Componentes Fortemente Conectados**
  - Um grafo direcionado G = (V, A) é **fortemente conectado** se cada dois vértices quaisquer são alcançáveis a partir um do outro.
  - Os **componentes fortemente conectados** de um grafo direcionado são conjuntos de vértices sob a relação “são mutuamente alcançáveis”.
  - Um **grafo direcionado fortemente conectado** tem apenas um componente fortemente conectado.



Grafos (Revisão)

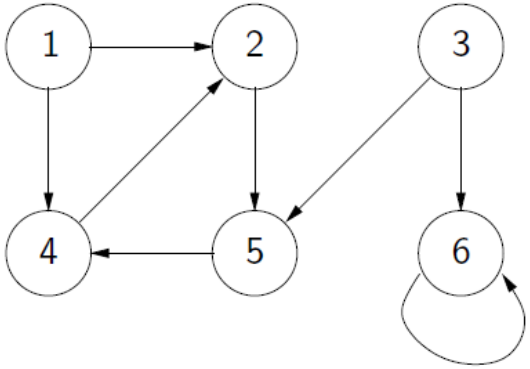
- **Outras Classificações de Grafos**
  - Um **grafo ponderado** possui pesos associados às arestas.
  - Um **grafo completo** é um grafo não direcionado no qual todos os pares de vértices são adjacentes.

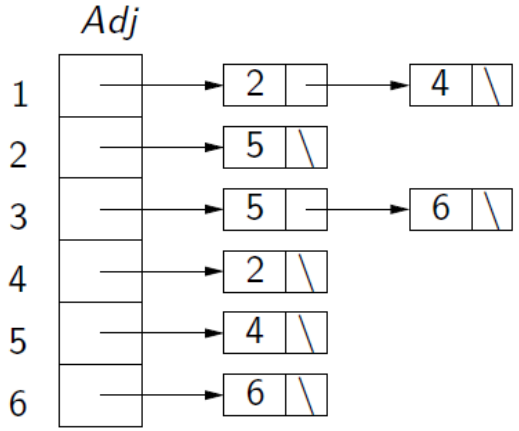




Grafos (Revisão)

- **Representação de Grafos**
  - **Lista de Adjacências:**
    - Consiste em um vetor *Adj* com |V| listas de adjacências, uma para cada vértice $v \in V$.
    - Para cada $u \in V$, *Adj*[*u*] contém ponteiros para todos os vértices *v* tal que $(u, v) \in A$. Ou seja, *Adj*[*u*] consiste de todos os vértices que são adjacentes a *u*.

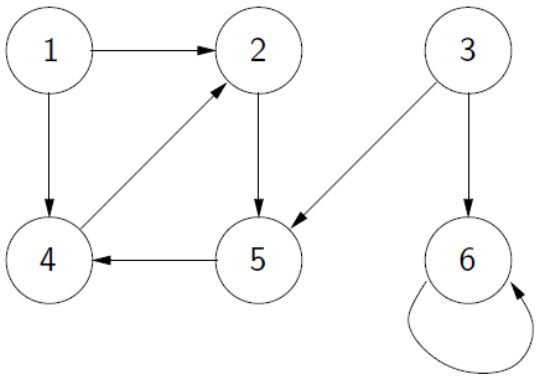




Grafos (Revisão)

- **Representação de Grafos**
  - **Matriz de Adjacências:**
    - Para um grafo G = (V, E), assumimos que os vértices são rotulados com números 1, 2, . . . , |V|.
    - A representação consiste de uma matriz A_{ij} de dimensões |V| × |V|, onde:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \; se \; (i,j) \in A \\ 0 \; caso \; contrario \end{cases}$$



	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	1	0	0
2	0	0	0	0	1	0
3	0	0	0	0	1	1
4	0	1	0	0	0	0
5	0	0	0	1	0	0
6	0	0	0	0	0	1

Busca em Largura

- A busca em largura é um dos algoritmos mais simples para exploração de um grafo.
  - Dados um grafo G = (V, E) e um vértice s, chamado de **fonte**, a busca em largura sistematicamente explora as arestas de G de maneira a visitar todos os vértices alcançáveis a partir de s.

- Expande a fronteira entre vértices descobertos e não descobertos uniformemente através da largura da **fronteira**.
  - O algoritmo descobre todos os vértices a uma distância k do vértice origem antes de descobrir qualquer vértice a uma distância k + 1.

- O grafo pode ser direcionado ou não direcionado.

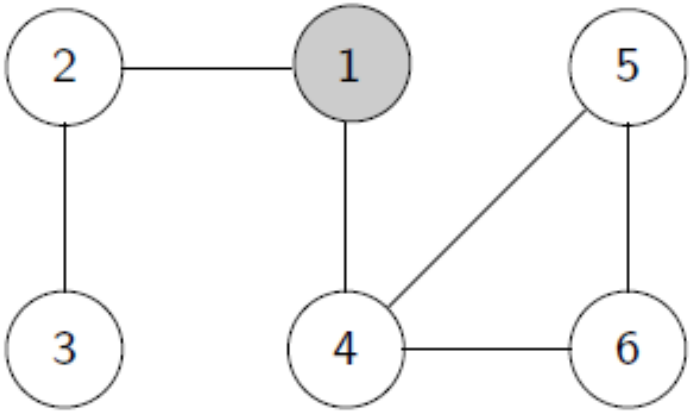
Busca em Largura

- **Algoritmo:**
  - Para controlar a busca, o algoritmo da Busca em Largura pinta cada vértice na cor branca, cinza ou preto.
  - Todos os vértices iniciam com a cor branca e podem, mais tarde, se tornar cinza e depois preto.
    - **Branca:** não visitado;
    - **Cinza:** visitado;
    - **Preta:** visitado e seus nós adjacentes visitados.

Busca em Largura

```
BuscaEmLargura(G, s)
  for each u ∈ V[G]
    c[u] ← white
    d[u] ← ∞
    π[u] ← NULL
  c[s] ← gray
  d[s] ← 0
  Q ← {s} //Queue
  while Q ≠ ∅
    u ← head[Q]
    for each v ∈ Adj[u]
      if c[v] = white
        c[v] ← gray
        d[v] ← d[u] + 1
        π[v] ← u
        enqueue(Q,v)
    dequeue(Q)
    c[u] ← black
```

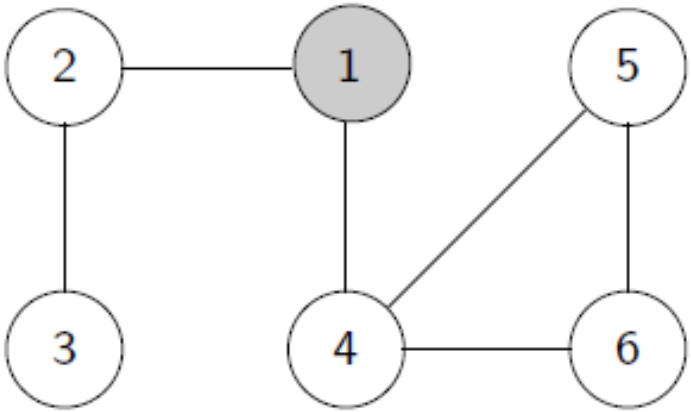
Busca em Largura



	1	2	3	4	5	6
d	0	∞	∞	∞	∞	∞
π	\	\	\	\	\	\
c	g	w	w	w	w	w
Q	1					

```
for each u ∈ V[G]
  c[u] ← white
  d[u] ← ∞
  π[u] ← NULL
c[s] ← gray
d[s] ← 0
Q ← {s} //Queue
```

Busca em Largura

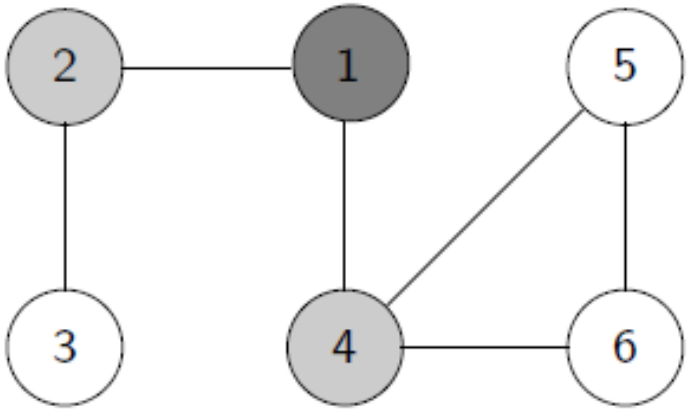


	1	2	3	4	5	6
d	0	∞	∞	∞	∞	∞
π	\	\	\	\	\	\
c	g	w	w	w	w	w

Q
1

```
u ← head[Q]
for each v ∈ Adj[u]
  if c[v] = white
    c[v] ← gray
    d[v] ← d[u] + 1
    π[v] ← u
    enqueue(Q,v)
dequeue(Q)
c[u] ← black
```

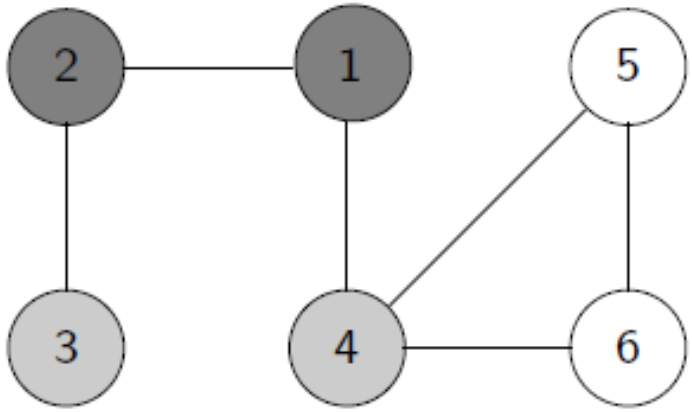
Busca em Largura



	1	2	3	4	5	6
d	0	1	∞	1	∞	∞
π	\	1	\	1	\	\
c	b	g	w	g	w	w
Q	2	4				

```
u ← head[Q]
for each v ∈ Adj[u]
  if c[v] = white
    c[v] ← gray
    d[v] ← d[u] + 1
    π[v] ← u
    enqueue(Q,v)
dequeue(Q)
c[u] ← black
```

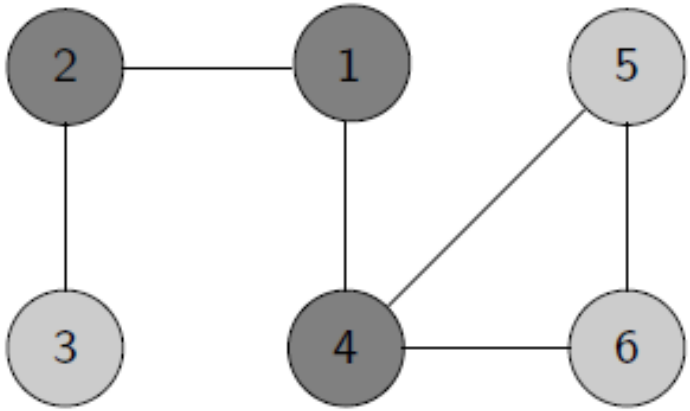
Busca em Largura



	1	2	3	4	5	6
d	0	1	2	1	∞	∞
π	\	1	2	1	\	\
c	b	b	g	g	w	w
Q	4	3				

```
u ← head[Q]
for each v ∈ Adj[u]
  if c[v] = white
    c[v] ← gray
    d[v] ← d[u] + 1
    π[v] ← u
    enqueue(Q,v)
dequeue(Q)
c[u] ← black
```

Busca em Largura



	1	2	3	4	5	6
d	0	1	2	1	2	2
π	\	1	2	1	4	4
c	b	b	g	b	g	g
Q	3	5	6			

```
u ← head[Q]
for each v ∈ Adj[u]
  if c[v] = white
    c[v] ← gray
    d[v] ← d[u] + 1
    π[v] ← u
    enqueue(Q,v)
dequeue(Q)
c[u] ← black
```

Busca em Largura – Análise

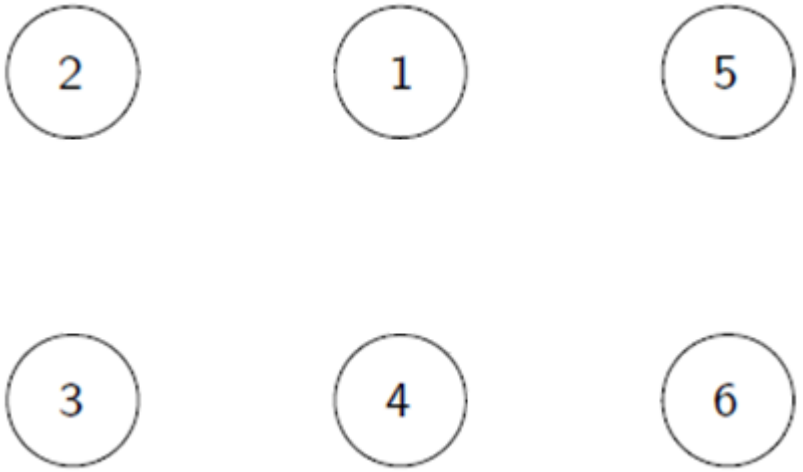
```
BuscaEmLargura(G, s)
  for each u ∈ V[G]
    c[u] ← white
    d[u] ← ∞
    π[u] ← NULL
  c[s] ← gray
  d[s] ← 0
  Q ← {s} //Queue
  while Q ≠ ∅
    u ← head[Q]
    for each v ∈ Adj[u]
      if c[v] = white
        c[v] ← gray
        d[v] ← d[u] + 1
        π[v] ← u
        enqueue(Q,v)
    dequeue(Q)
    c[u] ← black
```

- Cada vértice de V é colocado na fila Q no máximo uma vez: O(V);
- A lista de adjacência de um vértice qualquer de *u* é percorrida somente quando o vértice é removido da fila;
- A soma de todas as listas de adjacentes é O(A), então o tempo total gasto com as listas de adjacentes é O(A);
- Enfileirar e desenfileirar tem custo O(1);
- Complexidade: **O(V + A)**

Busca em Largura

- A partir de π é possível reconstruir a **árvore da busca em largura**:

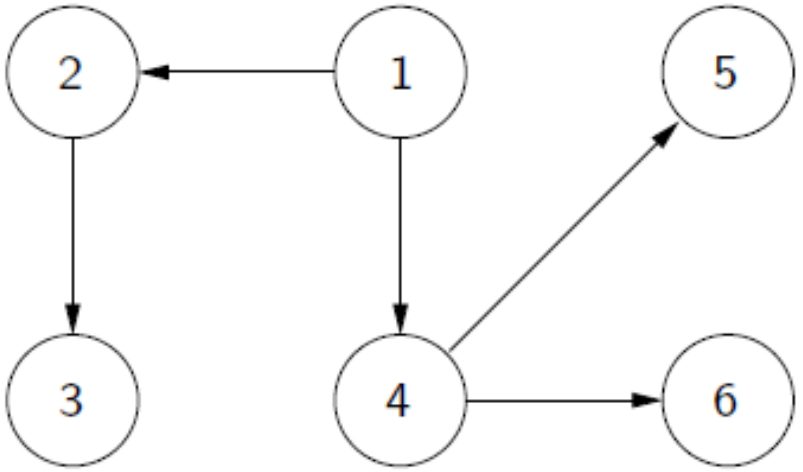
	1	2	3	4	5	6
d	0	1	2	1	2	2
π	\	1	2	1	4	4
c	b	b	g	b	g	g



Busca em Largura

- A partir de π é possível reconstruir a **árvore da busca em largura**:

	1	2	3	4	5	6
d	0	1	2	1	2	2
π	\	1	2	1	4	4
c	b	b	g	b	g	g



Busca em Profundidade

- A estratégia é buscar o vértice mais profundo no grafo sempre que possível:
  - As arestas são exploradas a partir do vértice *v* mais recentemente descoberto que ainda possui arestas não exploradas saindo dele.

- Quando todas as arestas adjacentes a *v* tiverem sido exploradas a busca anda para trás para explorar vértices que saem do vértice do qual *v* foi descoberto (**backtraking**).

- O algoritmo é a base para muitos outros algoritmos importantes, tais como verificação de grafos acíclicos, ordenação topológica e componentes fortemente conectados.

Busca em Profundidade

- **Algoritmo:**
  - Para controlar a busca, o algoritmo da Busca em Profundidade pinta cada vértice na cor branca, cinza ou preto.
  - Todos os vértices iniciam com a cor branca e podem, mais tarde, se tornar cinza e depois preto.
    - **Branca:** não visitado;
    - **Cinza:** visitado;
    - **Preta:** visitado e seus nós adjacentes visitados.

Busca em Profundidade

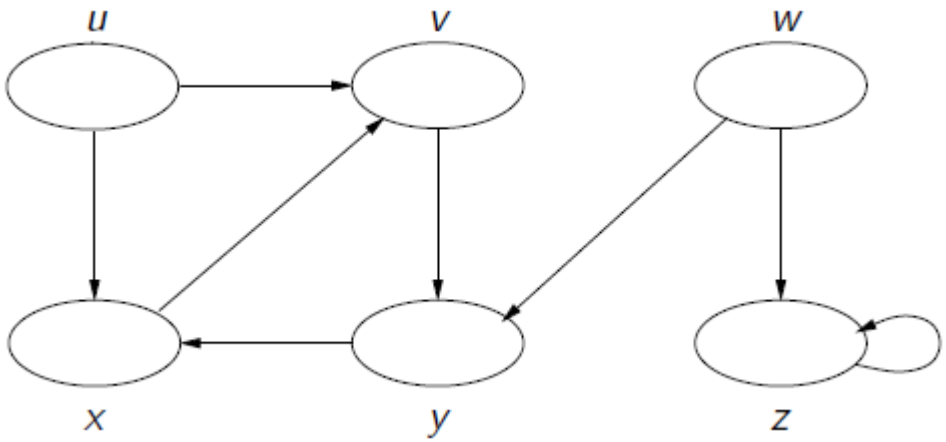
- **Algoritmo:**
  - A busca em profundidade também marca cada vértice com um *timestamp*.
  - Cada vértice tem dois *timestamps*:
    - **d[v]:** indica o instante em que *v* foi visitado (pintado com cinza);
    - **f[v]:** indica o instante em que a busca pelos vértices na lista de adjacência de *v* foi completada (pintado de preto).

Busca em Profundidade

```
BuscaEmProfundidade(G)
  for each u ∈ V[G]
    c[u] ← white
    π[u] ← NULL
  time ← 0
  for each u ∈ V[G]
    if c[u] = white
      visita(u)
```

```
visita(u)
  c[u] ← gray
  d[u] ← time ← time + 1
  for each v ∈ Adj[u]
    if c[v] = white
      π[v] ← u
      visita(v)
  c[u] ← black
  f[u] ← time ← time + 1
```

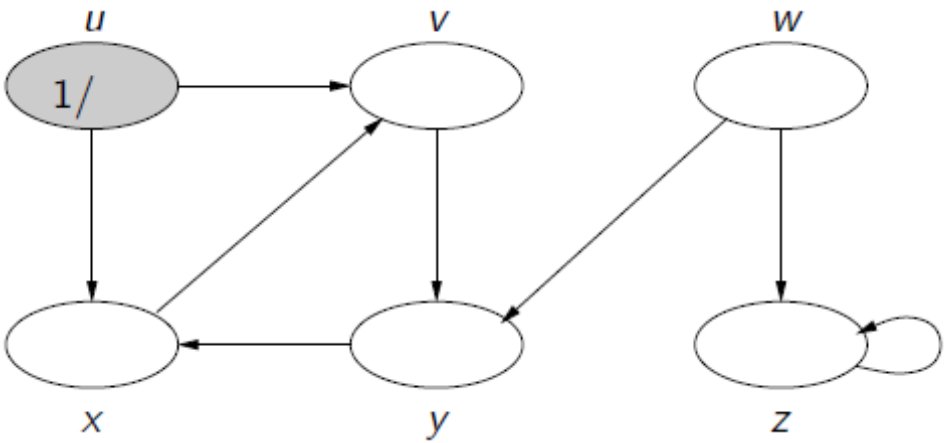
Busca em Profundidade




```
for each u ∈ V[G]
  c[u] ← white
  π[u] ← NULL
time ← 0
for each u ∈ V[G]
  if c[u] = white
    visita(u)
```

	u	v	y	x	w	z
c	w	w	w	w	w	w
π	/	/	/	/	/	/
d						
f						

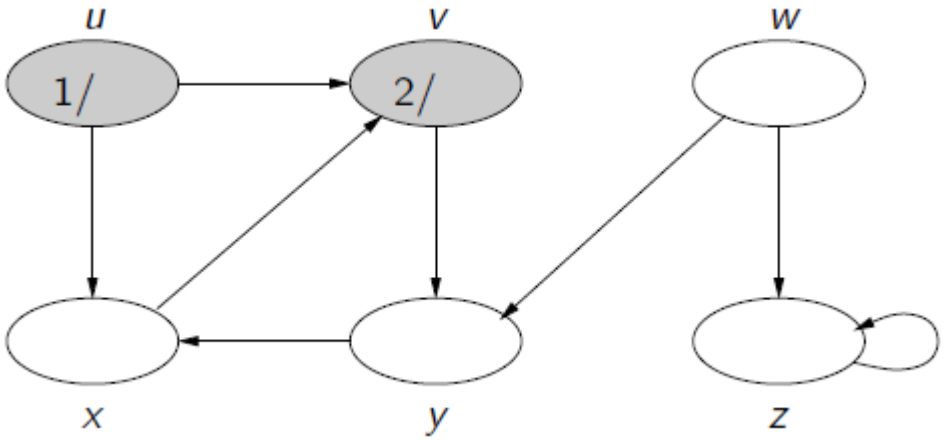
Busca em Profundidade




```
c[u] ← gray
d[u] ← time ← time + 1
for each v ∈ Adj[u]
  if c[v] = white
    π[v] ← u
    visita(v)
c[u] ← black
f[u] ← time ← time + 1
```

	u	v	y	x	w	z
c	g	w	w	w	w	w
π	/	/	/	/	/	/
d	1					
f						

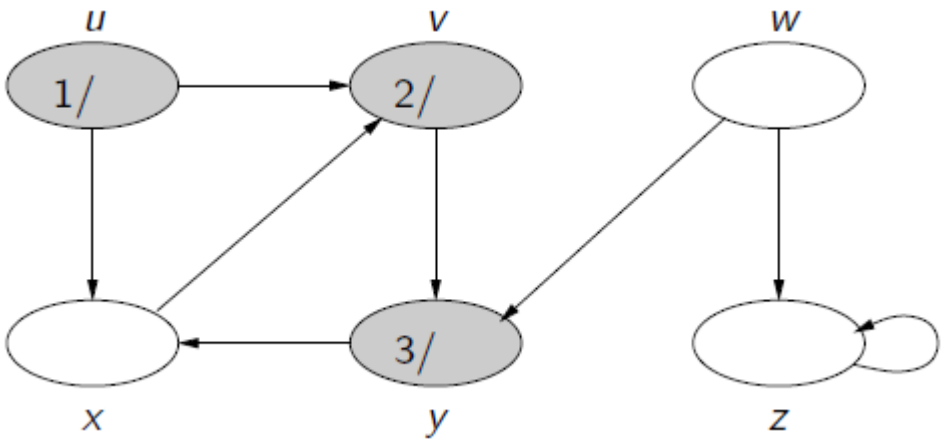
Busca em Profundidade




```
c[u] ← gray
d[u] ← time ← time + 1
for each v ∈ Adj[u]
  if c[v] = white
    π[v] ← u
    visita(v)
c[u] ← black
f[u] ← time ← time + 1
```

	u	v	y	x	w	z
c	g	g	w	w	w	w
π	/	u	/	/	/	/
d	1	2				
f						

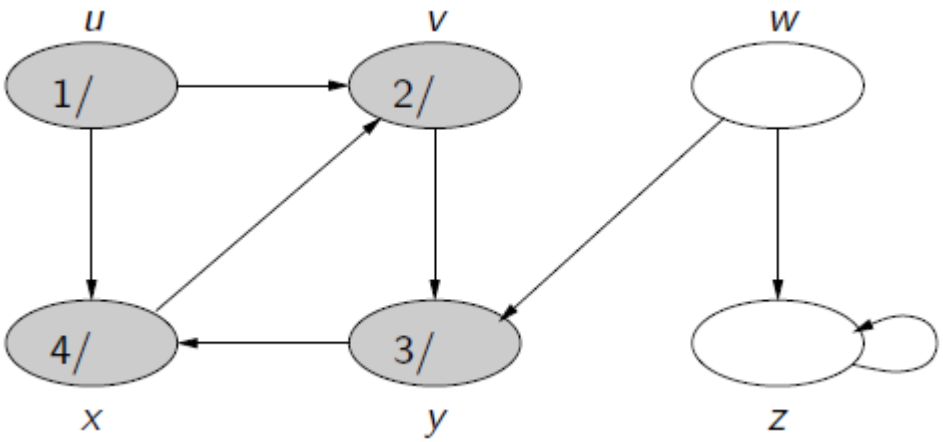
Busca em Profundidade




```
c[u] ← gray
d[u] ← time ← time + 1
for each v ∈ Adj[u]
  if c[v] = white
    π[v] ← u
    visita(v)
c[u] ← black
f[u] ← time ← time + 1
```

	u	v	y	x	w	z
c	g	g	g	w	w	w
π	/	u	v	/	/	/
d	1	2	3			
f						

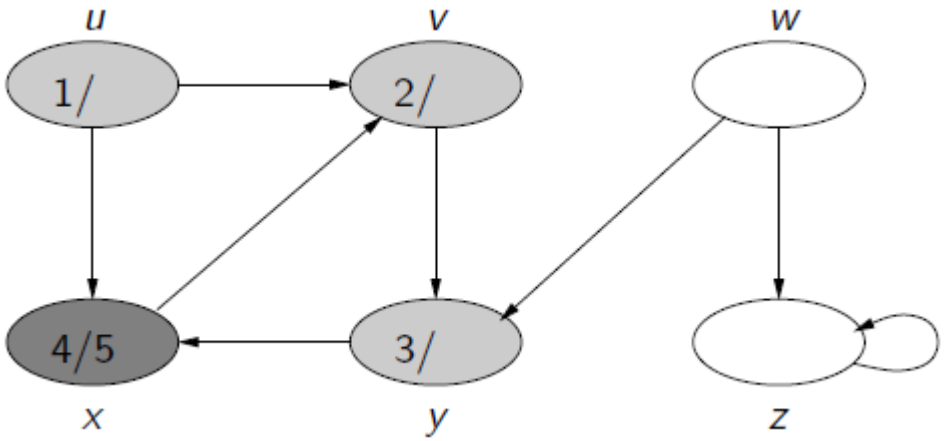
Busca em Profundidade




```
c[u] ← gray
d[u] ← time ← time + 1
for each v ∈ Adj[u]
  if c[v] = white
    π[v] ← u
    visita(v)
c[u] ← black
f[u] ← time ← time + 1
```

	u	v	y	x	w	z
c	g	g	g	g	w	w
π	/	u	v	y	/	/
d	1	2	3	4		
f						

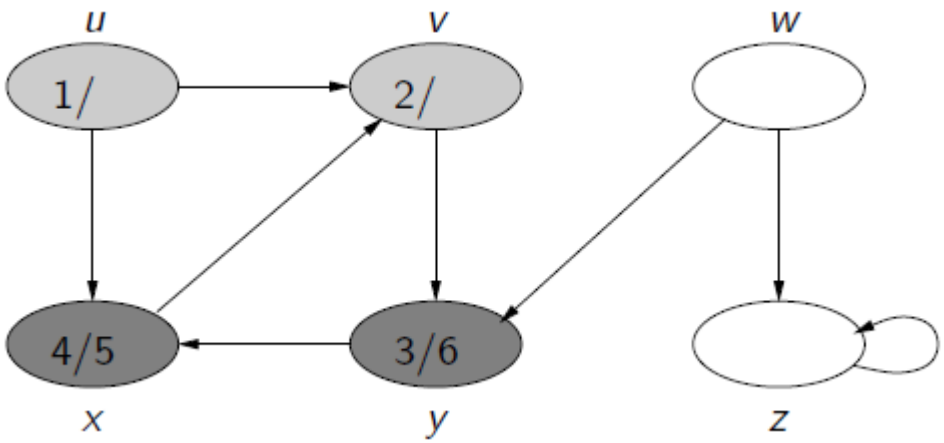
Busca em Profundidade




```
c[u] ← gray
d[u] ← time ← time + 1
for each v ∈ Adj[u]
  if c[v] = white
    π[v] ← u
    visita(v)
c[u] ← black
f[u] ← time ← time + 1
```

	u	v	y	x	w	z
c	g	g	g	b	w	w
π	/	u	v	y	/	/
d	1	2	3	4		
f				5		

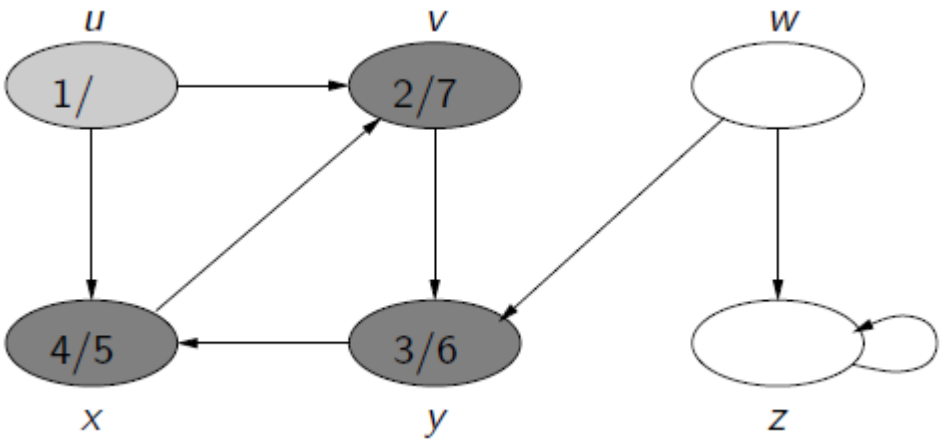
Busca em Profundidade




```
c[u] ← gray
d[u] ← time ← time + 1
for each v ∈ Adj[u]
  if c[v] = white
    π[v] ← u
    visita(v)
c[u] ← black
f[u] ← time ← time + 1
```

	u	v	y	x	w	z
c	g	g	b	b	w	w
π	/	u	v	y	/	/
d	1	2	3	4		
f			6	5		

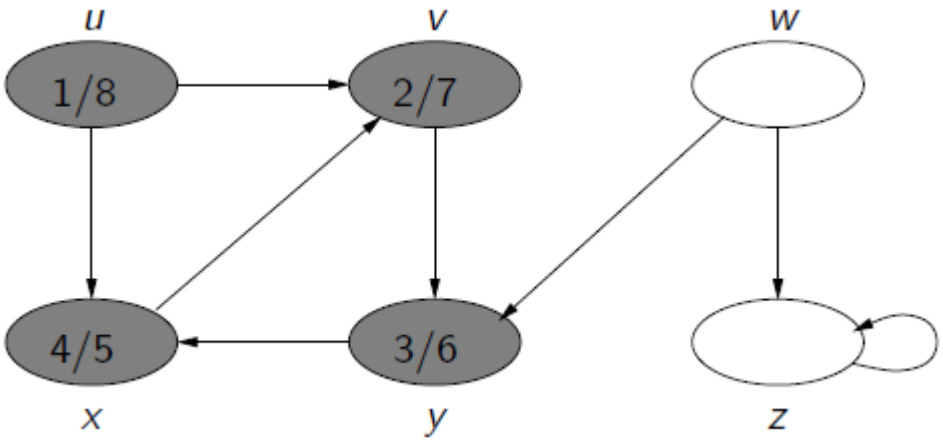
Busca em Profundidade




```
c[u] ← gray
d[u] ← time ← time + 1
for each v ∈ Adj[u]
  if c[v] = white
    π[v] ← u
    visita(v)
c[u] ← black
f[u] ← time ← time + 1
```

	u	v	y	x	w	z
c	g	b	b	b	w	w
π	/	u	v	y	/	/
d	1	2	3	4		
f		7	6	5		

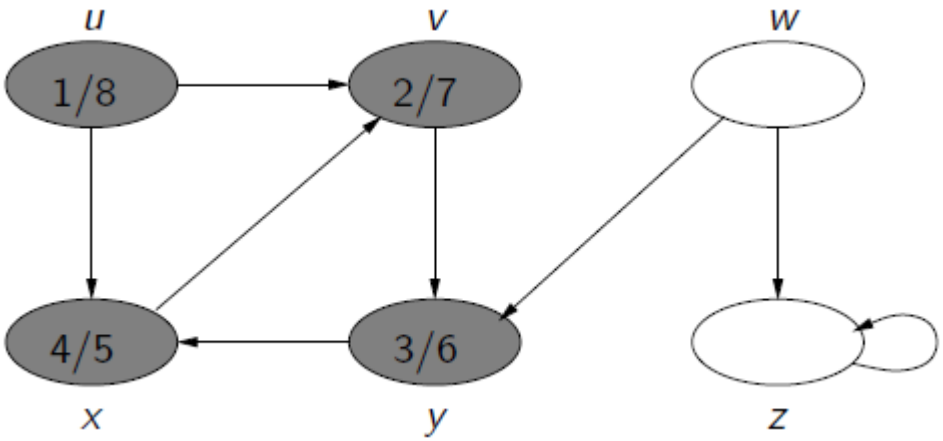
Busca em Profundidade




```
c[u] ← gray
d[u] ← time ← time + 1
for each v ∈ Adj[u]
  if c[v] = white
    π[v] ← u
    visita(v)
c[u] ← black
f[u] ← time ← time + 1
```

	u	v	y	x	w	z
c	b	b	b	b	w	w
π	/	u	v	y	/	/
d	1	2	3	4		
f	8	7	6	5		

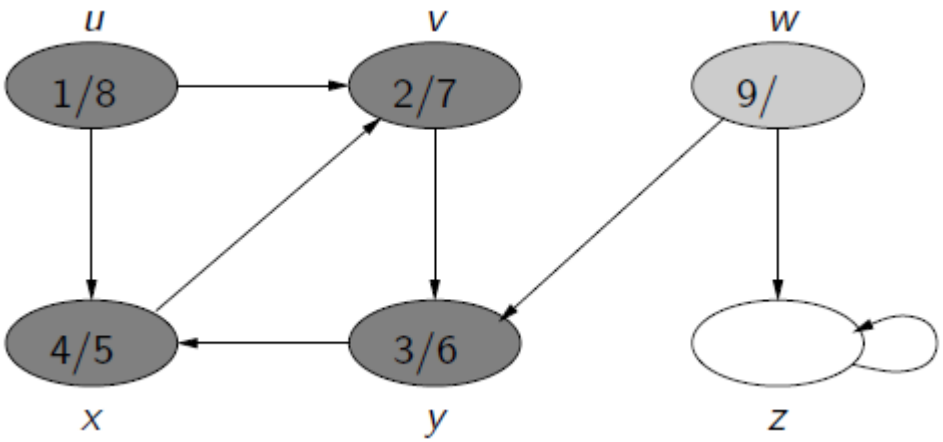
Busca em Profundidade




```
for each u ∈ V[G]
  c[u] ← white
  π[u] ← NULL
time ← 0
for each u ∈ V[G]
  if c[u] = white
    visita(u)
```

	u	v	y	x	w	z
c	b	b	b	b	w	w
π	/	u	v	y	/	/
d	1	2	3	4		
f	8	7	6	5		

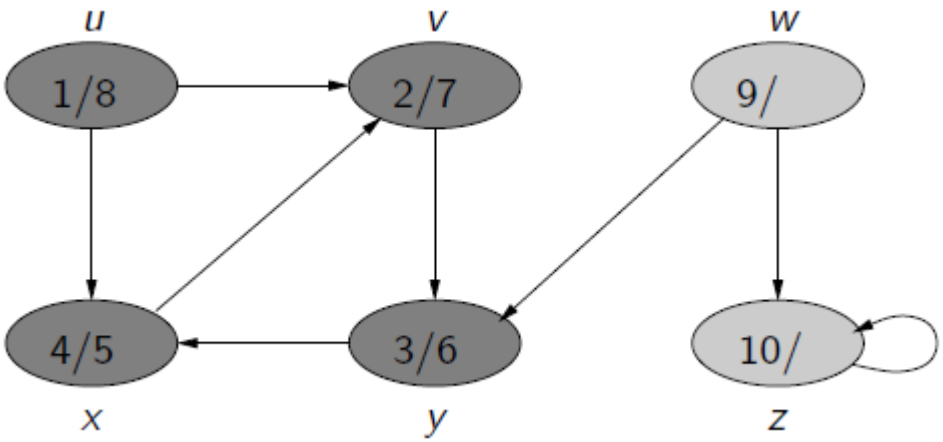
Busca em Profundidade




```
c[u] ← gray
d[u] ← time ← time + 1
for each v ∈ Adj[u]
  if c[v] = white
    π[v] ← u
    visita(v)
c[u] ← black
f[u] ← time ← time + 1
```

	u	v	y	x	w	z
c	b	b	b	b	g	w
π	/	u	v	y	/	/
d	1	2	3	4	9	
f	8	7	6	5		

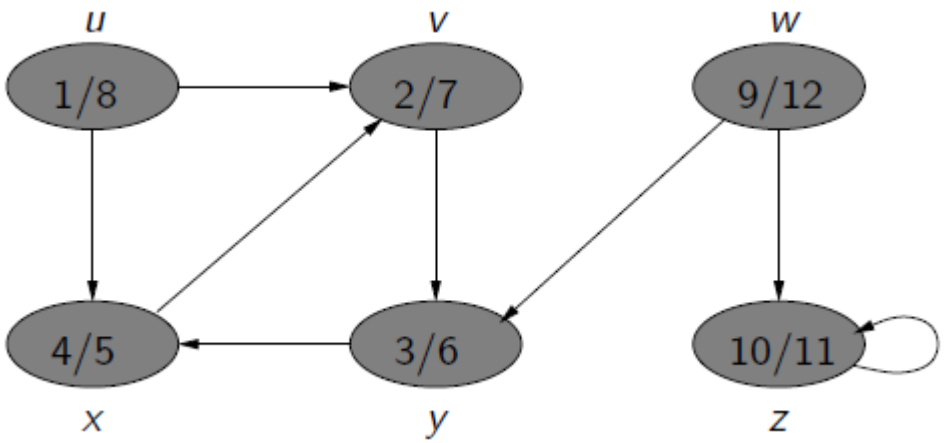
Busca em Profundidade




```
c[u] ← gray
d[u] ← time ← time + 1
for each v ∈ Adj[u]
  if c[v] = white
    π[v] ← u
    visita(v)
c[u] ← black
f[u] ← time ← time + 1
```

	u	v	y	x	w	z
c	b	b	b	b	g	g
π	/	u	v	y	/	w
d	1	2	3	4	9	10
f	8	7	6	5		

Busca em Profundidade




```
c[u] ← gray
d[u] ← time ← time + 1
for each v ∈ Adj[u]
  if c[v] = white
    π[v] ← u
    visita(v)
c[u] ← black
f[u] ← time ← time + 1
```

	u	v	y	x	w	z
c	b	b	b	b	b	b
π	/	u	v	y	/	w
d	1	2	3	4	9	10
f	8	7	6	5	11	12

Busca em Profundidade – Análise

```
BuscaEmProfundidade(G)
  for each u ∈ V[G]
    c[u] ← white
    π[u] ← NULL
  time ← 0
  for each u ∈ V[G]
    if c[u] = white
      visita(u)
```

```
visita(u)
  c[u] ← gray
  d[u] ← time ← time + 1
  for each v ∈ Adj[u]
    if c[v] = white
      π[v] ← u
      visita(v)
  c[u] ← black
  f[u] ← time ← time + 1
```

- O procedimento `visita` é chamado exatamente uma vez ara cada vértice *u* ∈ V, isso porque `visita` é chamado apenas para vértices brancos e a primeira ação é pintar o vértice de cinza: O(V);
- O loop principal de `visita(u)` tem complexidade O(A);
- Complexidade: **O(V + A)**

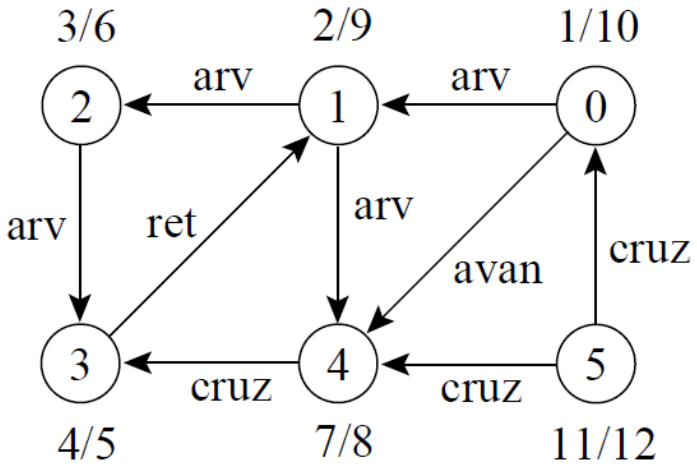
Busca em Profundidade

- **Classificação de Arestas:**
  - **Arestas de árvore:** são arestas de uma árvore de busca em profundidade. A aresta (u, v) é uma aresta de árvore se v foi descoberto pela primeira vez ao percorrer a aresta (u, v);
  - **Arestas de retorno:** conectam um vértice u com um antecessor v em uma árvore de busca em profundidade (inclui self-loops);
  - **Arestas de avanço:** não pertencem à árvore de busca em profundidade mas conectam um vértice a um descendente que pertence à árvore de busca em profundidade;
  - **Arestas de cruzamento:** podem conectar vértices na mesma árvore de busca em profundidade, ou em duas árvores diferentes.

Busca em Profundidade

- Classificação de arestas pode ser útil para derivar outros algoritmos.

- Na busca em profundidade cada aresta pode ser classificada pela cor do vértice que é alcançado pela primeira vez:
  - Branco indica uma **aresta de árvore**.
  - Cinza indica uma **aresta de retorno**.
  - Preto indica uma **aresta de avanço** quando u é descoberto antes de v ou uma **aresta de cruzamento** caso contrário.



Exercícios

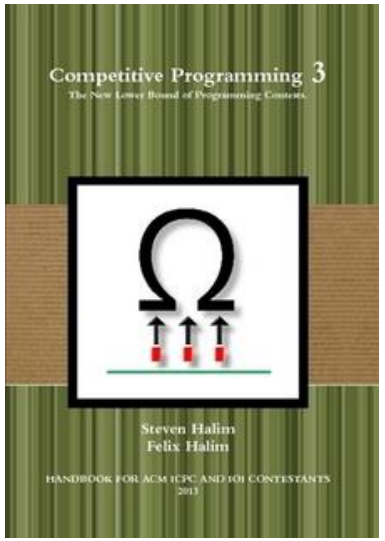
Lista de Exercícios 12 – Busca em Profundidade e Busca em Largura

http://www.inf.puc-rio.br/~elima/paa/

Leitura Complementar

- Halim e Halim. **Competitive Programming**, 3rd Edition, 2003.

- **Capítulo 4: Graph**



- Cormen, Leiserson, Rivest e Stein. **Algoritmos – Teoria e Prática**, 2ª. Edição, Editora Campus, 2002.

- **Capítulo 22: Algoritmos Elementares de Grafos**