Projeto e Análise de Algoritmos

Aula 09 – Algoritmos de Ordenação

Edirlei Soares de Lima
<edirlei@iprj.uerj.br>

Ordenação

- **Problema:**
  - **Entrada**: conjunto de itens $a_1, a_2, \ldots, a_n$;
  - **Saída**: conjunto de itens permutados em uma ordem $a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{kn}$, tal que, dada uma função de ordenação f, tem-se a seguinte relação: $f(a_{k1}) < f(a_{k2}) < \ldots < f(a_{kn})$.

- Ordenar consiste no processo de rearranjar um conjunto de objetos em uma ordem crescente ou descendente.

- O objetivo principal da ordenação é facilitar a recuperação posterior de itens do conjunto ordenado.

Ordenação

- Qualquer tipo de campo **chave**, sobre o qual exista uma relação de ordem total <, para uma dada função de ordenação, pode ser utilizado.

- A relação < deve satisfazer as condições:
  - Apenas uma das seguintes expressões pode ser verdadeira: a < b, a = b, a > b;
  - Se a < b e b < c então a < c;

- Um método de ordenação é dito **estável** se a ordem relativa dos itens com chaves iguais mantém-se inalterada pelo processo de ordenação.

Ordenação

Vetor	10	20	30	40	50	60	70	80	90
	R$ 100,00	R$ 100,00	R$ 200,00	R$ 400,00	R$ 500,00	R$ 600,00	R$ 600,00	R$ 500,00	R$ 400,00
Estável	10	20	30	40	90	50	80	60	70
	R$ 100,00	R$ 100,00	R$ 200,00	R$ 400,00	R$ 400,00	R$ 500,00	R$ 500,00	R$ 600,00	R$ 600,00
Instável	20	10	30	90	40	50	80	70	60
	R$ 100,00	R$ 100,00	R$ 200,00	R$ 400,00	R$ 400,00	R$ 500,00	R$ 500,00	R$ 600,00	R$ 600,00

Ordenação

- Os métodos de ordenação são classificados em dois grandes grupos:
  - **Ordenação Interna**: São os métodos que não necessitam de uma memória secundária para o processo, a ordenação é feita na memória principal do computador;
    - Qualquer registro pode ser acessado em tempo O(1);
  - **Ordenação Externa**: Quando o arquivo a ser ordenado não cabe na memória principal e, por isso, tem de ser armazenado em disco.
    - Registros são acessados sequencialmente ou em grandes blocos;

Ordenação

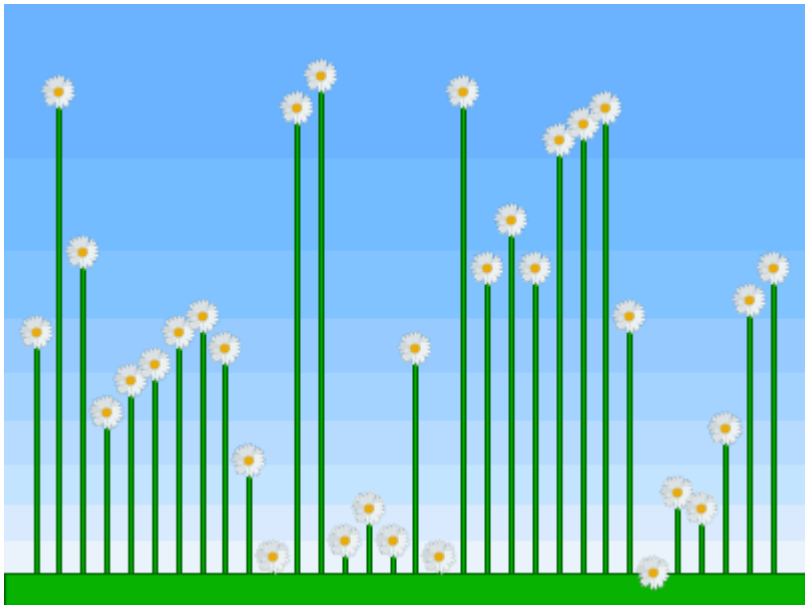
- **Métodos de Ordenação:**
  - Bubble Sort;
  - Selection Sort;
  - Insertion Sort;
  - Merge Sort;
  - Quick Sort;

- Limite assintótico mínimo para algoritmos de ordenação baseados em comparações:

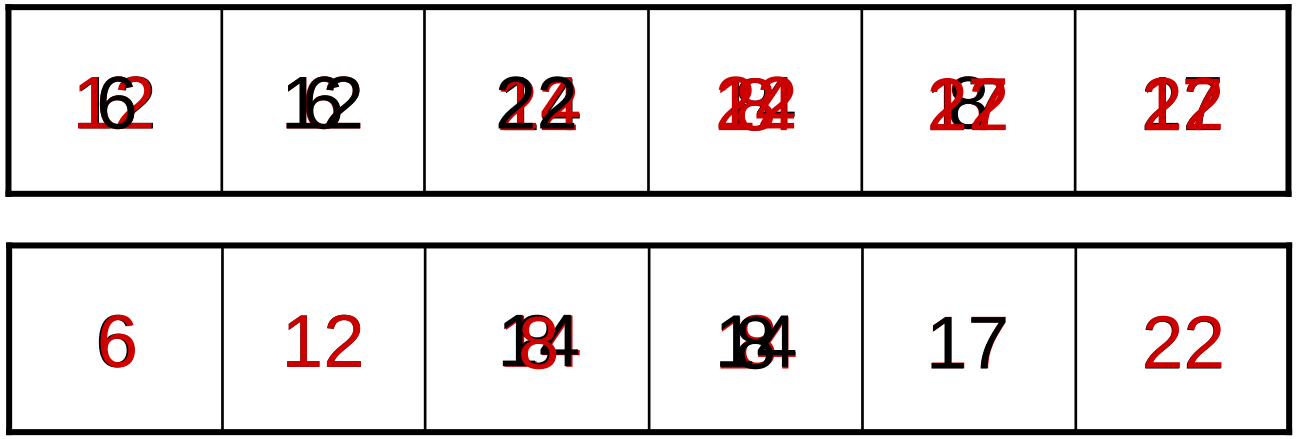
O(n log n)

Bubble Sort

- **Algoritmo:**
  - Quando dois elementos estão fora de ordem, troque-os de posição até que o i-ésimo elemento de maior valor do vetor seja levado para as posições finais do vetor;
  - Continue o processo até que todo o vetor esteja ordenado;



Bubble Sort



Bubble Sort

6	12	14	8	17	22

6	12	8	14	17	22

6	12	8	14	17	22

6	8	12	14	17	22

Bubble Sort - Implementação Iterativa (I)

```
void bubblesort(int n, int* v)
{
  int fim, i, temp;
  for (fim = n-1; fim > 0; fim--)
  {
    for (i=0; i<fim; i++)
    {
      if (v[i]>v[i+1])
      {
        temp = v[i];
        v[i] = v[i+1];
        v[i+1] = temp;
      }
    }
  }
}
```

Bubble Sort - Implementação Iterativa (II)

```
void bubblesort(int n, int* v)
{
  int i, fim, troca, temp;
  for (fim = n-1; fim > 0; fim--){
    troca = 0;
    for (i=0; i<fim; i++){
      if (v[i]>v[i+1]){
        temp = v[i];
        v[i] = v[i+1];
        v[i+1] = temp;
        troca = 1;
      }
    }
    if (troca == 0)
        return;
  }
}
```

Implementação mais otimizada: para a busca quando ocorre uma passada sem trocas.

Bubble Sort - Complexidade

- Esforço computacional ≅ número de comparações
  ≅ número máximo de trocas
  - primeira passada: n-1 comparações
  - segunda passada: n-2 comparações
  - terceira passada: n-3 comparações

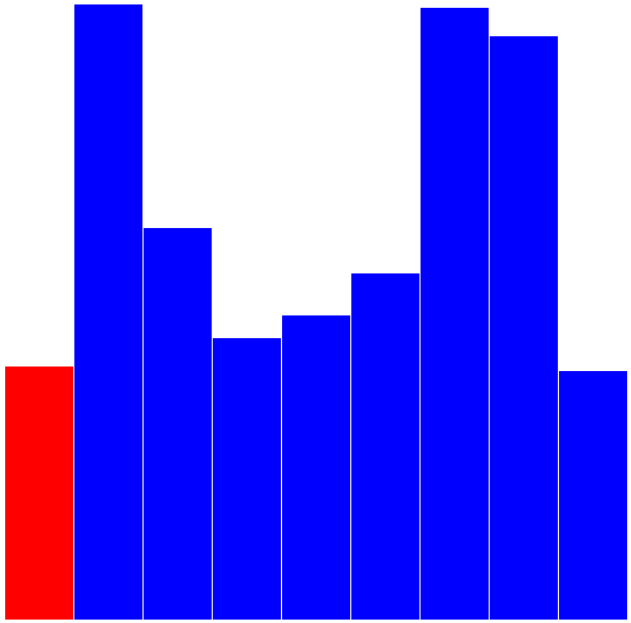
- Tempo total gasto pelo algoritmo:
  - T(n) = (n-1) + (n-2) + ... + 2 + 1
  - T(n) = $\frac{n^2 - n}{2}$
  - Algoritmo de ordem quadrática: **O(n^2)**

Bubble Sort

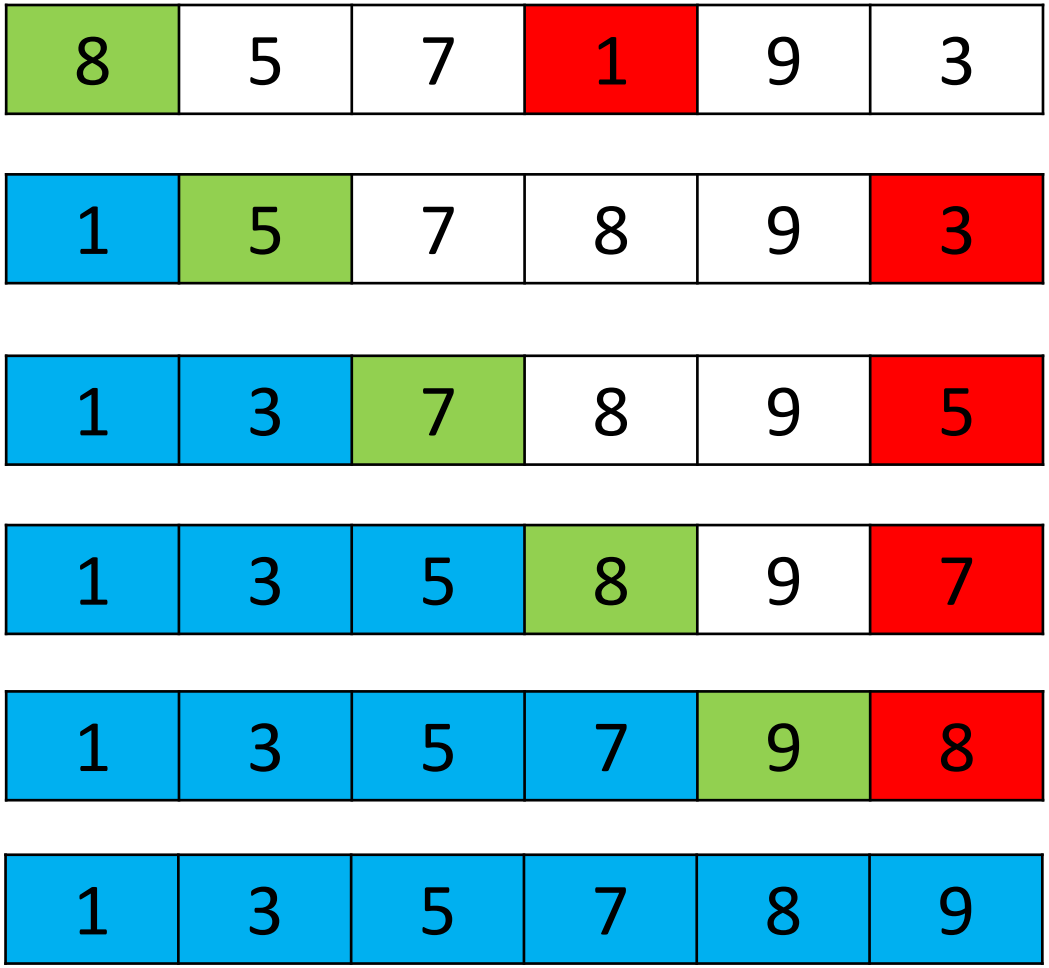
- Complexidade: $O(n^2)$
- Vantagens:
  - Fácil Implementação;
  - É estável;
- Desvantagens:
  - O fato do vetor já estar ordenado não ajuda em nada;
  - Ordem de complexidade quadrática;

Selection Sort

- **Algoritmo:**
  - Em cada etapa, em selecionar o maior (ou o menor) elemento e alocá-lo em sua posição correta dentro da futura lista ordenada.



Selection Sort



Selection Sort - Implementação

```
void selectSort(int arr[], int n)
{
  int pos_min, temp, i, j;
  for (i=0; i < n-1; i++){
    pos_min = i;
    for (j=i+1; j < n; j++){
      if (arr[j] < arr[pos_min])
        pos_min=j;
    }
    if (pos_min != i){
      temp = arr[i];
      arr[i] = arr[pos_min];
      arr[pos_min] = temp;
    }
  }
}
```

Selection Sort – Complexidade

- Esforço computacional ≅ número de comparações
  ≅ número máximo de trocas

- Tempo total gasto pelo algoritmo:
  - T(n) = (n-1) + (n-2) + ... + 2 + 1
  - T(n) = $\frac{n^2 - n}{2}$
  - Algoritmo de ordem quadrática: **O(n^2)**

Selection Sort

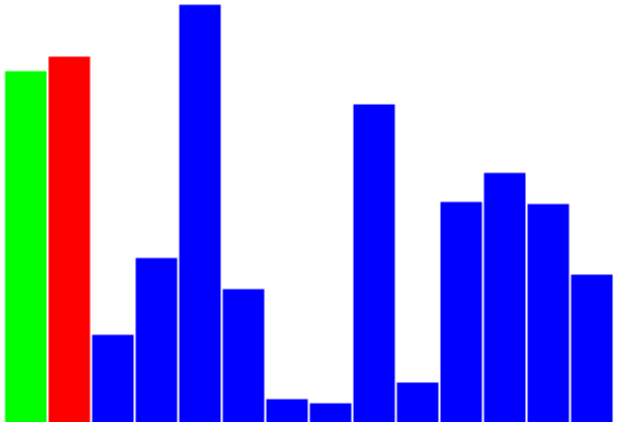
- Complexidade: $O(n^2)$

- Vantagens:
  - Fácil Implementação;
  - Pequeno número de movimentações;
  - Interessante para arquivos pequenos;

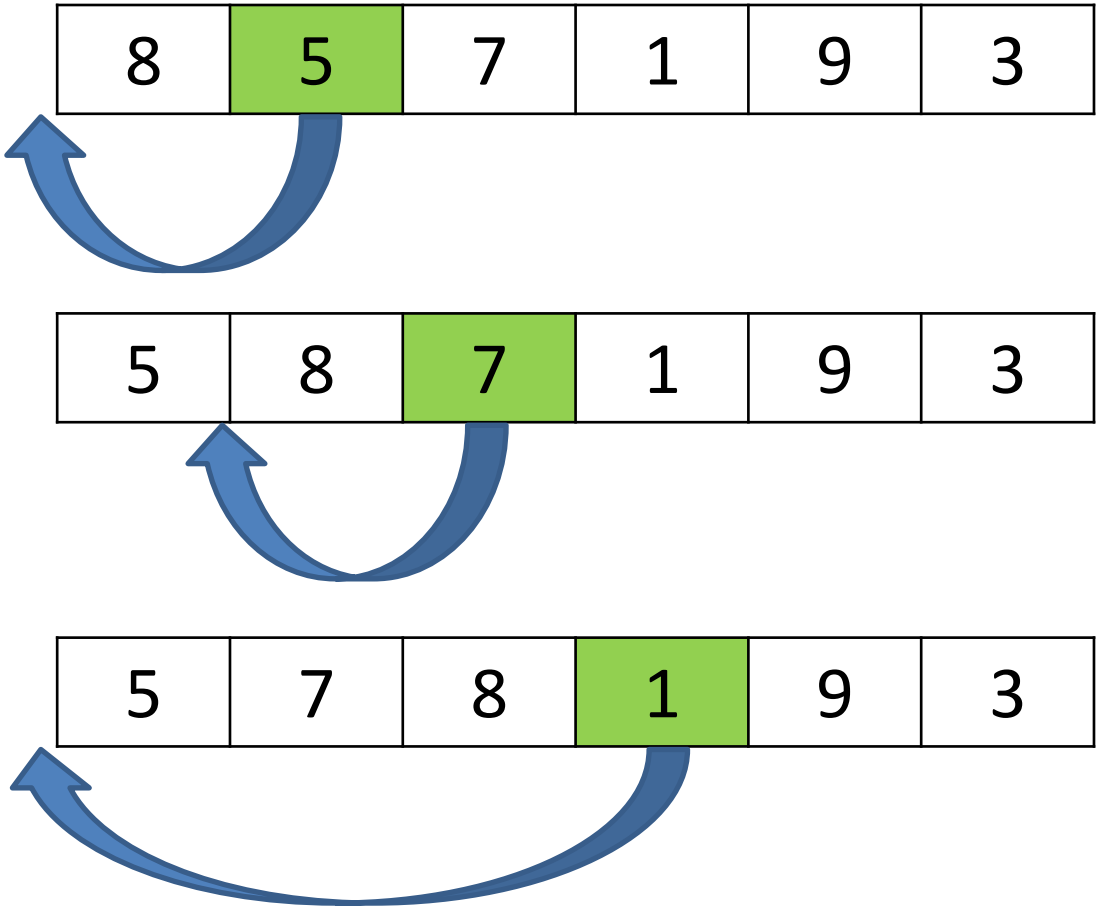
- Desvantagens:
  - O fato de o arquivo já estar ordenado não influencia em nada;
  - Ordem de complexidade quadrática;
  - Algoritmo não estável;

Insertion Sort

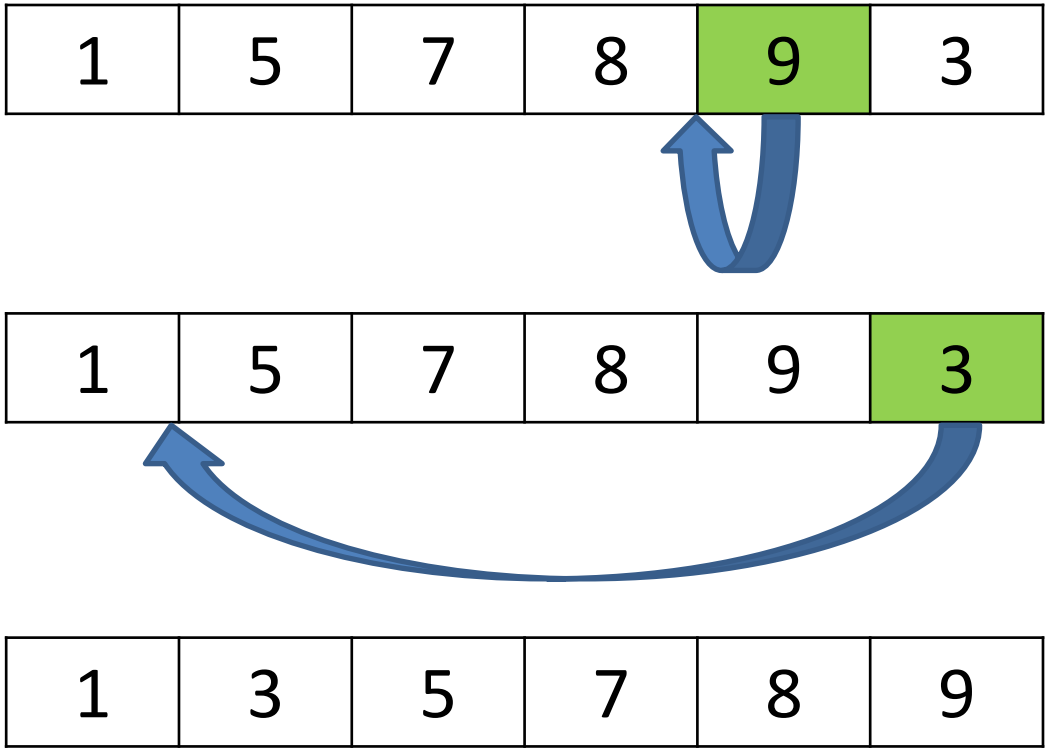
- **Algoritmo:**
  - Em cada passo, a partir de i=2, o i-ésimo item da sequência fonte é apanhado e transferido para a sequência destino, sendo colocado na posição correta.
  - A inserção do elemento no lugar de destino é efetuado movendo-se os itens com chave maiores para a direita e então inserindo-o na posição que ficou vazia.



Insertion Sort



Insertion Sort



Insertion Sort – Implementação

```
void insertion_sort(int arr[], int length)
{
  int j, i, temp;
  for (i = 1; i < length; i++)
  {
    j = i;
    while (j > 0 && arr[j] < arr[j-1])
    {
      temp = arr[j];
      arr[j] = arr[j-1];
      arr[j-1] = temp;
      j--;
    }
  }
}
```

Insertion Sort – Complexidade

- Esforço computacional ≅ número de comparações
  ≅ número máximo de trocas

- Tempo total gasto pelo algoritmo:
  - T(n) = (n-1) + (n-2) + ... + 2 + 1
  - T(n) = $\frac{n^2 - n}{2}$
  - Algoritmo de ordem quadrática: **O(n^2)**

Insertion Sort

- Complexidade: $O(n^2)$

- Vantagens:
  - Fácil Implementação;
  - Algoritmo estável;
  - O vetor já ordenado favorece a ordenação: O(n);

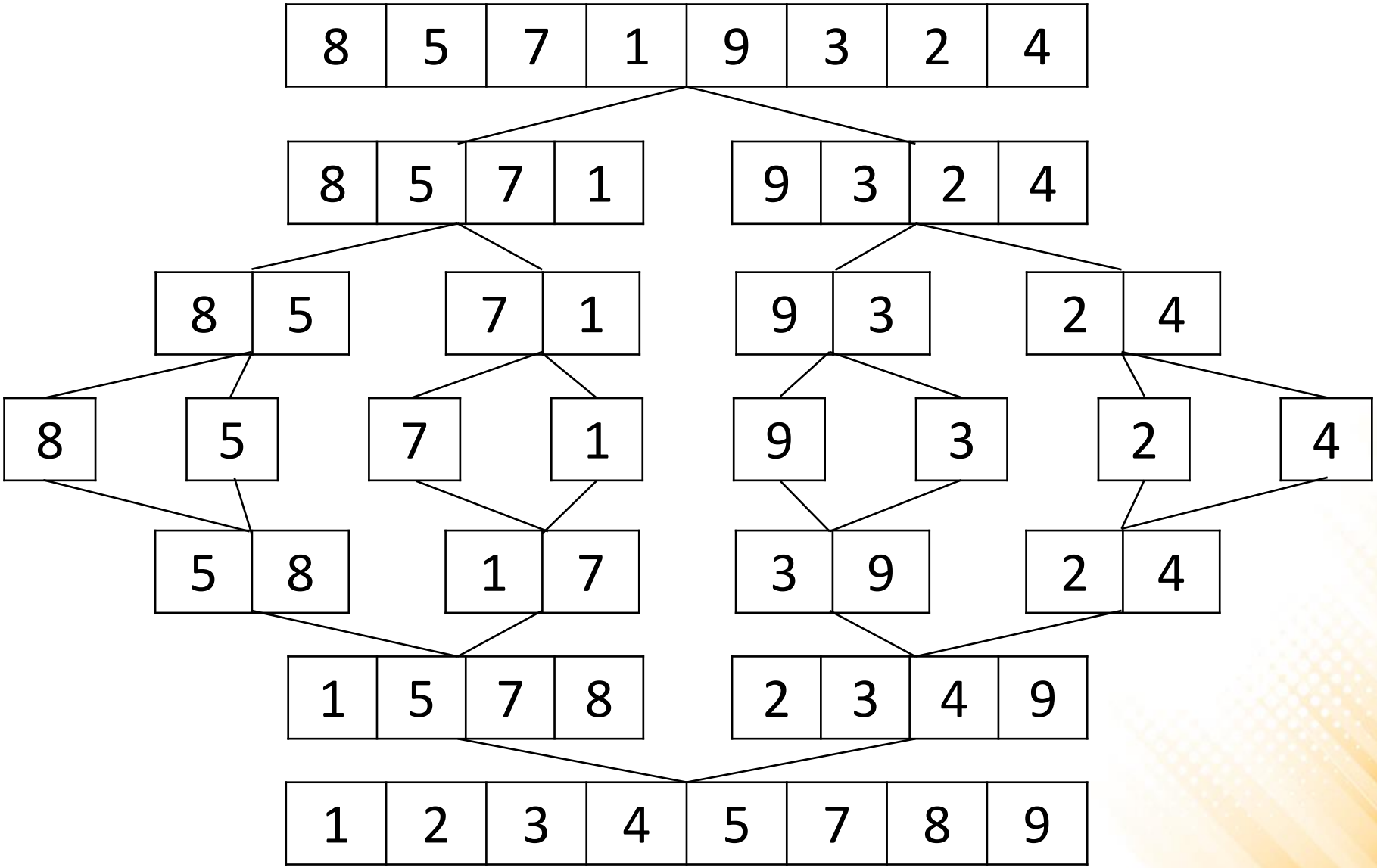
- Desvantagens:
  - Ordem de complexidade quadrática;
  - Ineficiente quando o vetor está ordenado inversamente (algo natural em um problema de ordenação);

Merge Sort

- **Algoritmo:**
  - Criar uma sequência ordenada a partir de duas outras também ordenadas.
  - Para isso, divide-se a sequência original em pares de dados, ordena-as; depois as agrupa em sequências de quatro elementos, e assim por diante, até ter toda a sequência dividida em apenas duas partes.

- É um algoritmo de ordenação do tipo dividir para conquistar:
  - **Dividir:** Dividir os dados em subsequências pequenas;
  - **Conquistar:** Classificar as duas metades recursivamente aplicando o merge sort;
  - **Combinar:** Juntar as duas metades em um único conjunto já classificado.

Merge Sort


8 5 7 1 9 3 2 4
8 5 7 1
9 3 2 4
8 5
7 1
9 3
2 4
8
5
7
1
9
3
2
4
5 8
1 7
3 9
2 4
1 5 7 8
2 3 4 9
1 2 3 4 5 7 8 9

Merge Sort – Implementação

```
void mergeSort_ordena(int *v, int esq, int dir)
{
  if (esq == dir)
    return;

  int meio = (esq+dir) / 2;
  mergeSort_ordena(v, esq, meio);
  mergeSort_ordena(v, meio+1, dir);
  mergeSort_intercala(v, esq, meio, dir);
}
```

Merge Sort – Implementação

```
void mergeSort_intercala(int* v, int esq, int meio, int dir)
{
  int i, j, k;
  int a_tam = meio - esq + 1;
  int b_tam = dir - meio;
  int *a = (int*)malloc(sizeof(int) * a_tam);
  int *b = (int*)malloc(sizeof(int) * b_tam);
  for(i = 0; i < a_tam; i++)
  {
    a[i] = v[i+esq];
  }
  for(i = 0;i < b_tam; i++)
  {
    b[i] = v[i+meio+1];
  }
```

[continua…]

Merge Sort – Implementação

[... continuação]

```
  ...
  for(i = 0, j = 0, k = esq; k <= dir; k++)
  {
    if(i == a_tam)
      v[k] = b[j++];
    else if (j == b_tam)
      v[k] = a[i++];
    else if (a[i] < b[j])
      v[k] = a[i++];
    else
      v[k] = b[j++];
  }
  free(a);
  free(b);
}
```

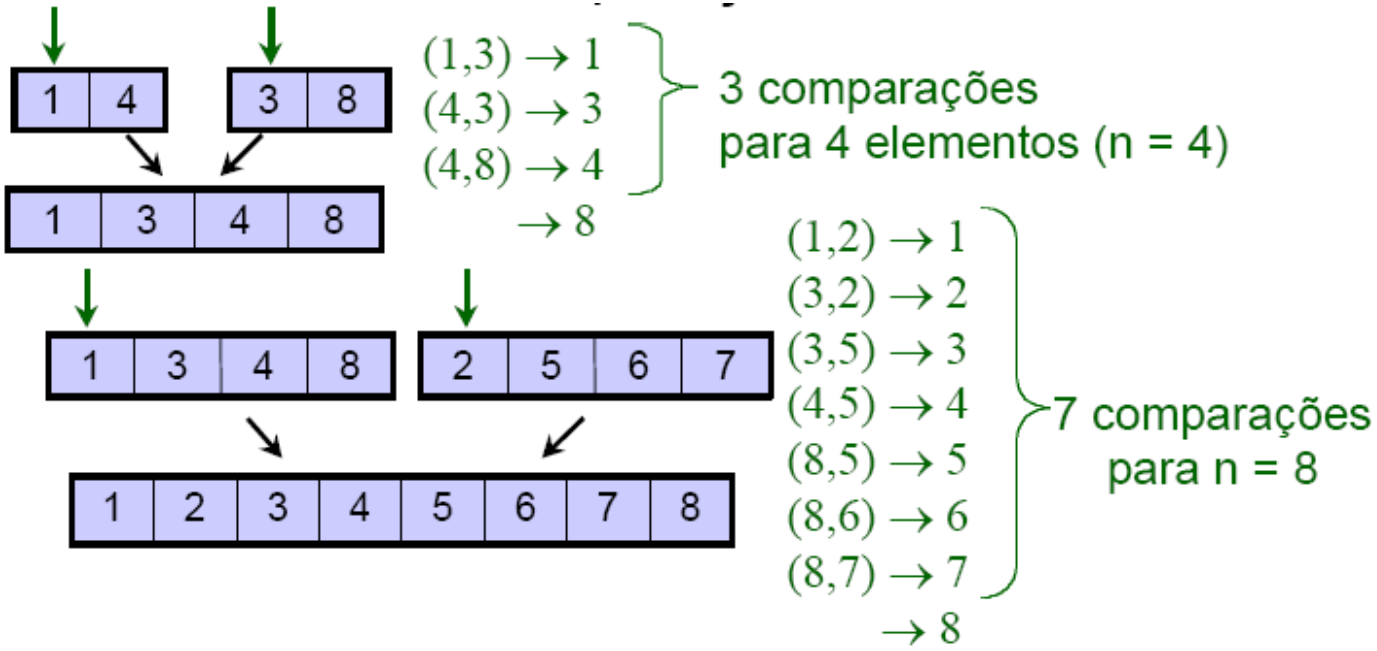
Merge Sort – Complexidade

- Tempo gasto para dividir: O(log n)

Repetição	Tamanho do Problema
1	n
2	n/2
3	n/4
…	…
log n	1

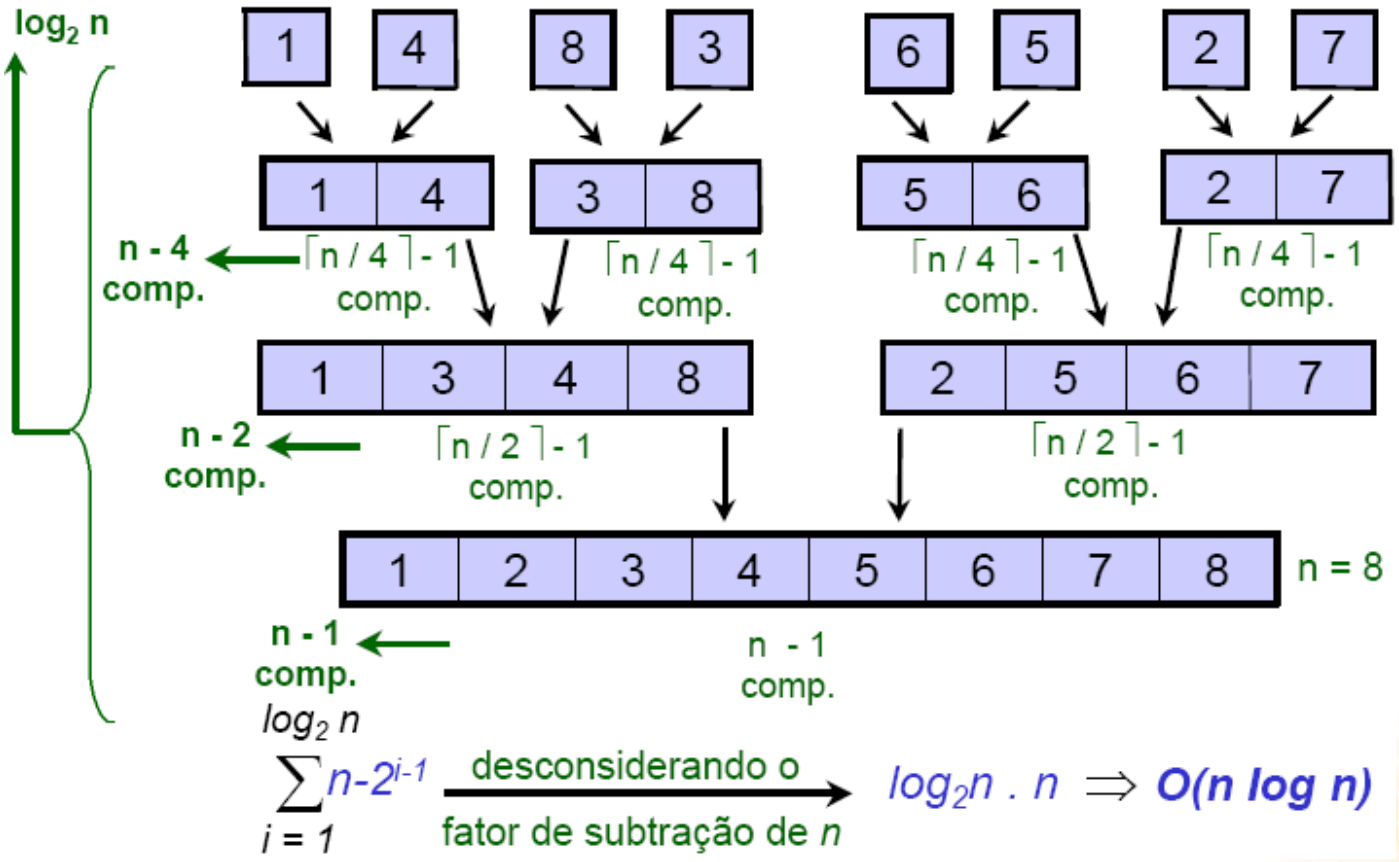
Merge Sort – Complexidade

- Tempo gasto para combinar: O(n)



Merge Sort – Complexidade

- Tempo total gasto pelo algoritmo: **O(n log n)**



Merge Sort

- Complexidade: O(n log n)

- Vantagens:
  - Complexidade O(n log n);
  - É estável;

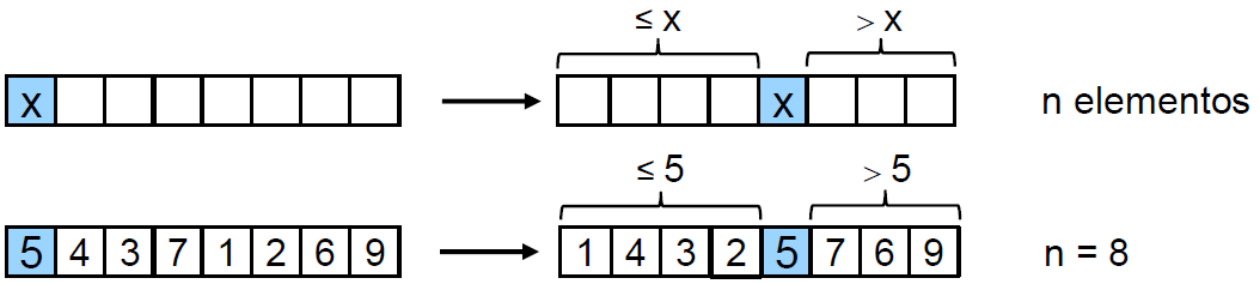
- Desvantagens:
  - Tradicionalmente baseia-se em chamadas recursivas, mas é possível implementa-lo sem utilizar recursão;
  - Utiliza memória auxiliar;

Quick Sort

- **Algoritmo:**
  1. Escolha um elemento arbitrário x, o ***pivô;***
  2. **Particione** o vetor de tal forma que x fique na posição correta v[i]:
     - x deve ocupar a posição i do vetor sse:

       todos os elementos v[0], … v[i-1] são menores que x;

       todos os elementos v[i+1], …, v[n-1] são maiores que x;



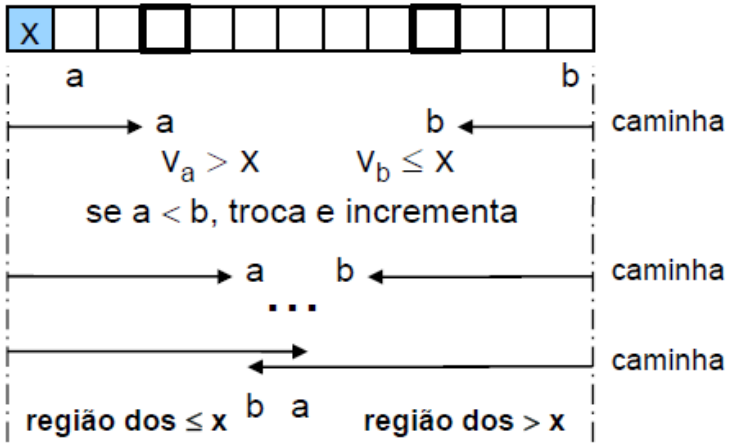
  3. Chame **recursivamente** o algoritmo para ordenar os subvetores v[0], … v[i-1] e v[i+1], …, v[n-1] (vetor da esquerda e vetor da direita)
     - continue até que os vetores que devem ser ordenados tenham 0 ou 1 elemento

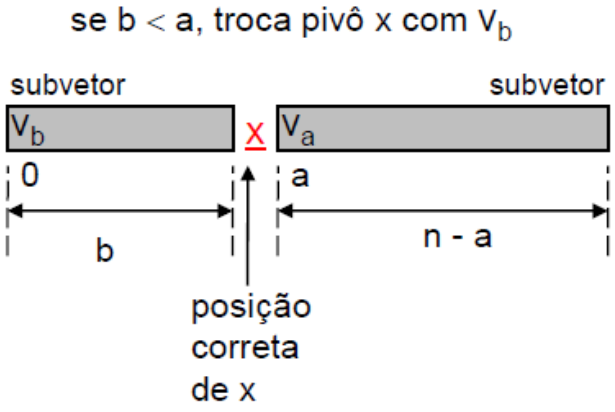
Quick Sort

```
quicksort do vetor de tamanho n
  se n > 1 então
    PARTIÇÃO com pivô x
    quicksort do subvetor à esquerda de x
    quicksort do subvetor à direita de x
```

Quick Sort

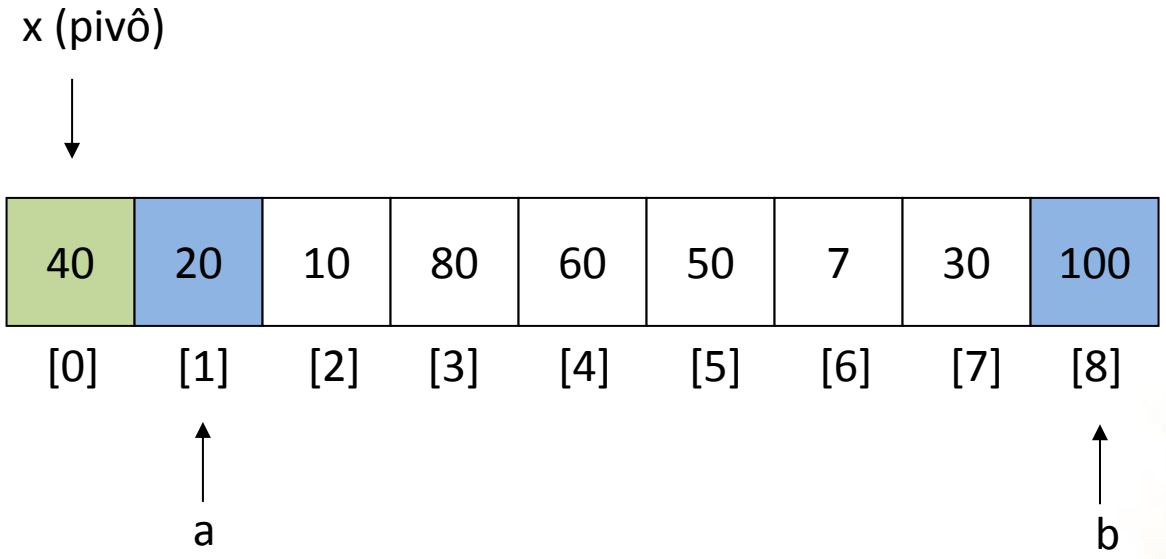
- **Processo de partição:**
  1. Caminhe com o índice **a** do início para o final, comparando x com v[1], v[2], … até encontrar v[**a**] > x
  2. Caminhe com o índice **b** do final para o início, comparando x com v[n-1], v[n-2], … até encontrar v[**b**] <= x
  3. Troque v[**a**] e v[**b**]
  4. Continue para o final a partir de v[**a+1**] e para o início a partir de v[**b-1**]
  5. Termine quando os índices de busca (**a** e **b**) se encontram (**b** < **a**)
     - A posição correta de x=v[0] é a posição **b**, então v[0] e v[**b**] são trocados



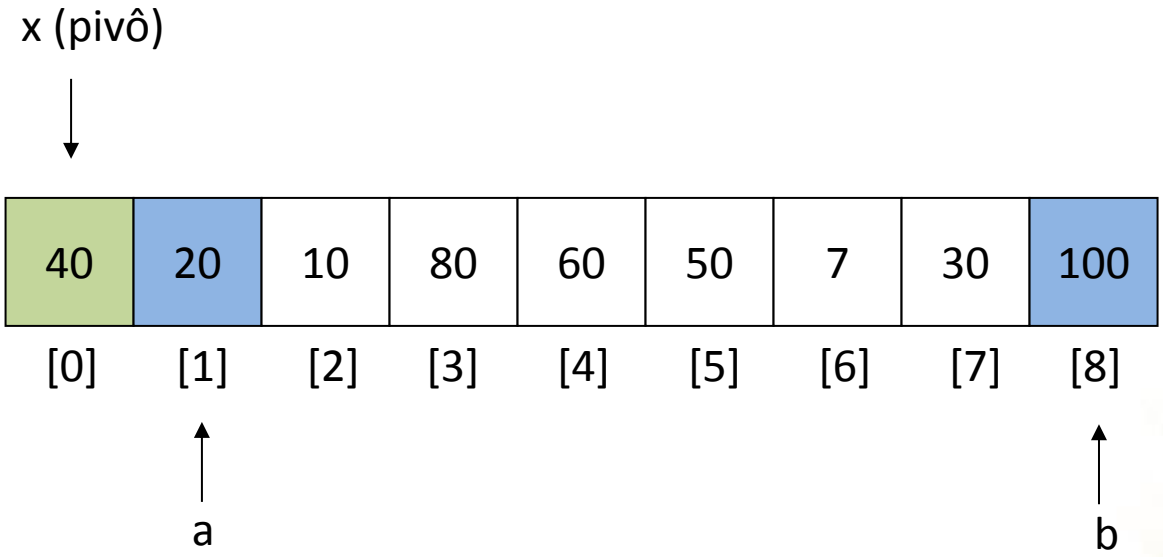


Quick Sort

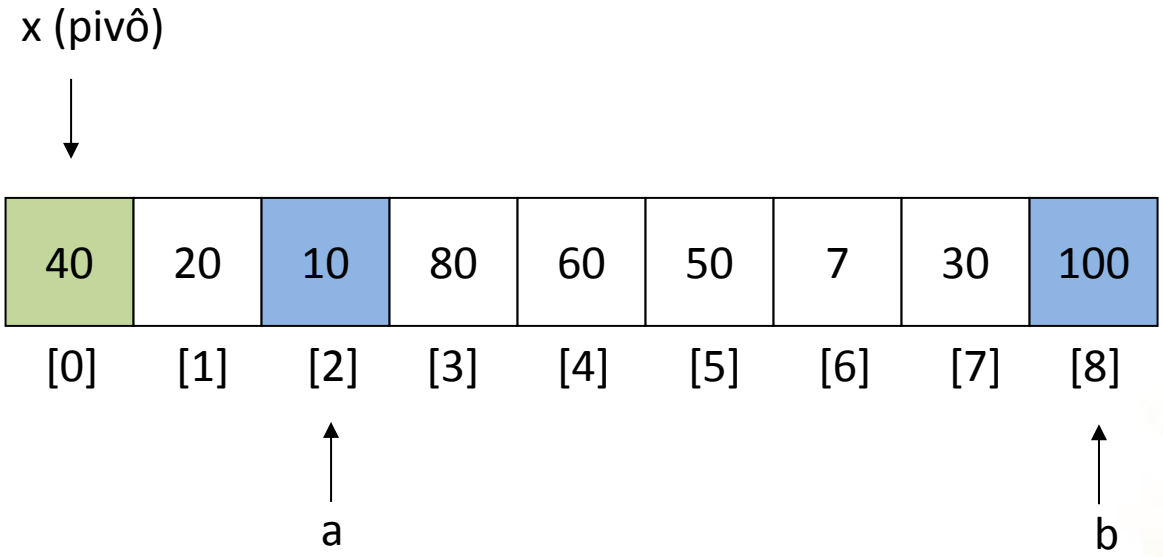
- **Processo de Partição:**
  - Exemplo:



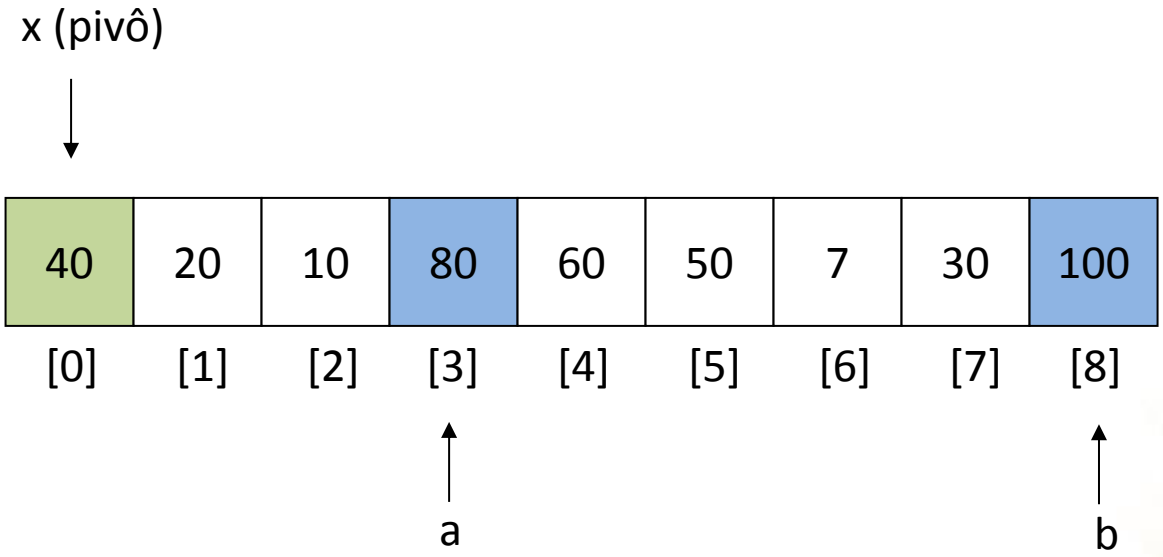
```
do{
  while (a < n && v[a] <= x)
    a++;
```



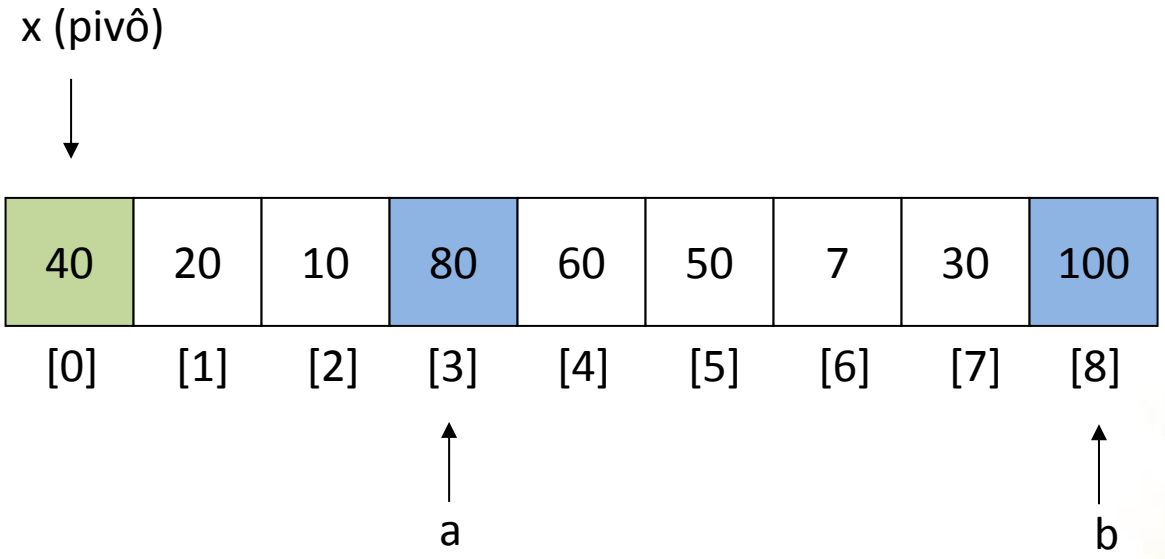
```
do{
  while (a < n && v[a] <= x)
    a++;
```



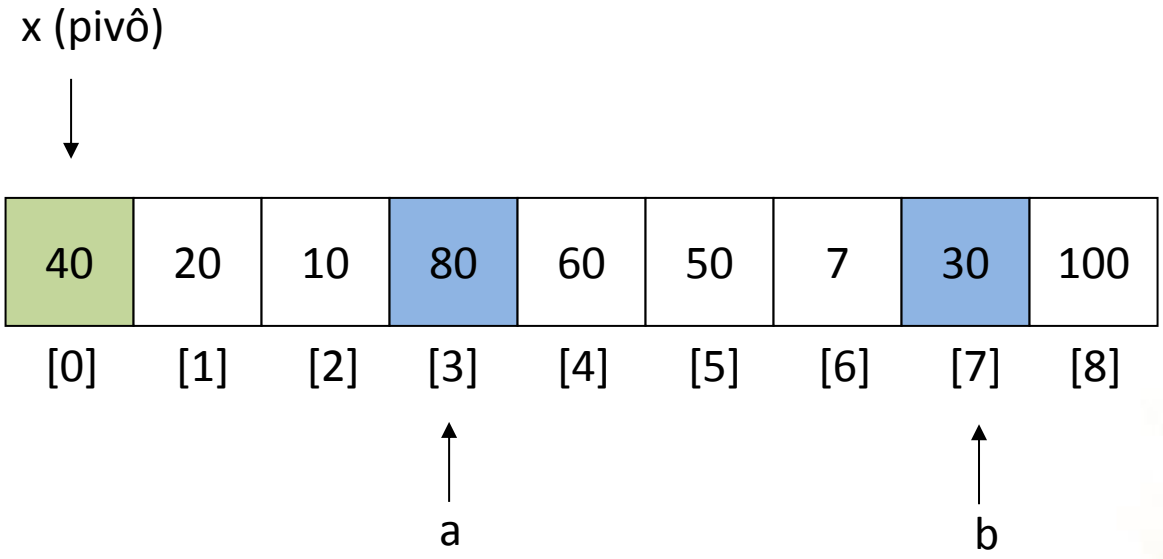
```
do{
   while (a < n && v[a] <= x)
      a++;
```



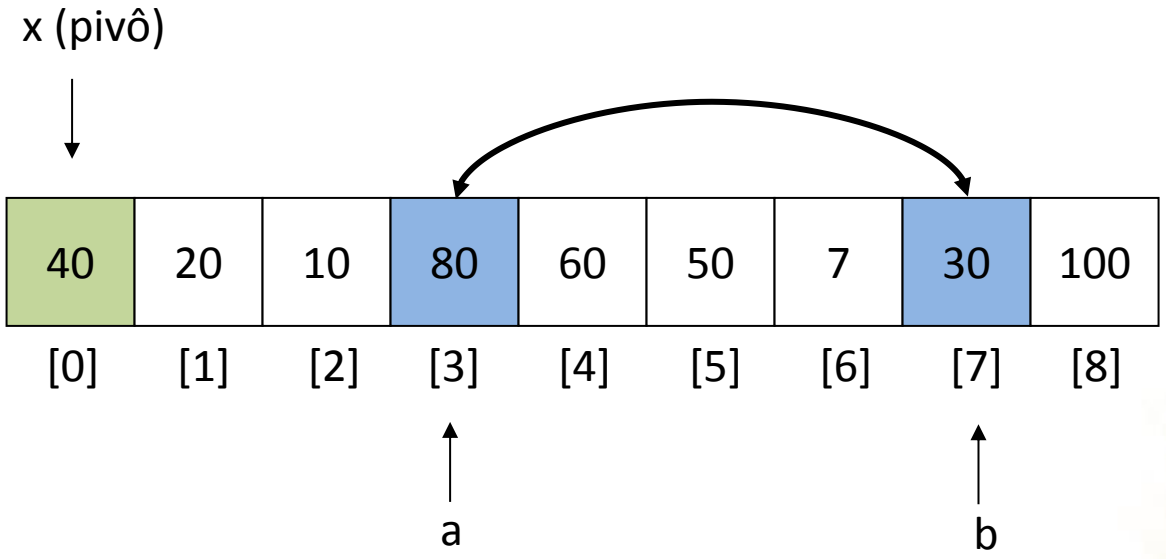
```
do{
  while (a < n && v[a] <= x)
    a++;
  while (v[b] > x)
    b--;
```



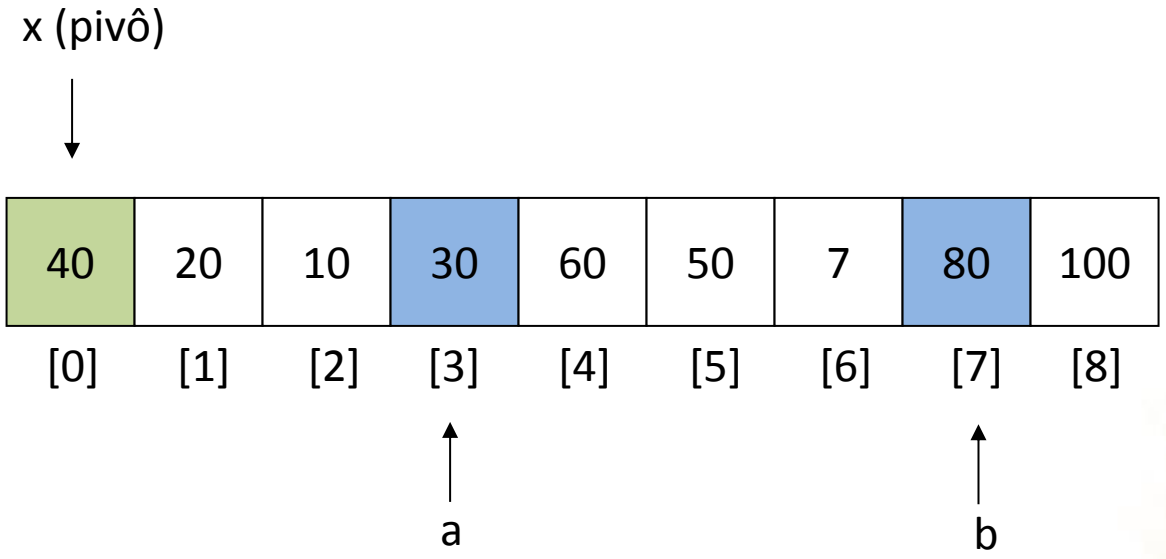
```
do{
  while (a < n && v[a] <= x)
    a++;
  while (v[b] > x)
    b--;
```



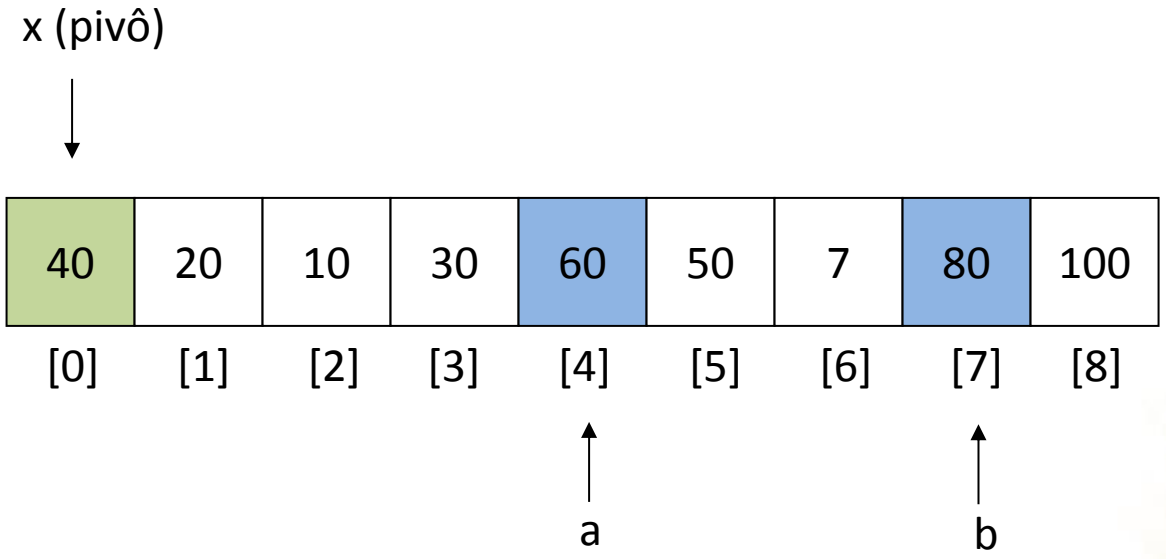
```
do{
  while (a < n && v[a] <= x)
    a++;
  while (v[b] > x)
    b--;
  if (a < b)
    troca(&v[a], &v[b]);
```



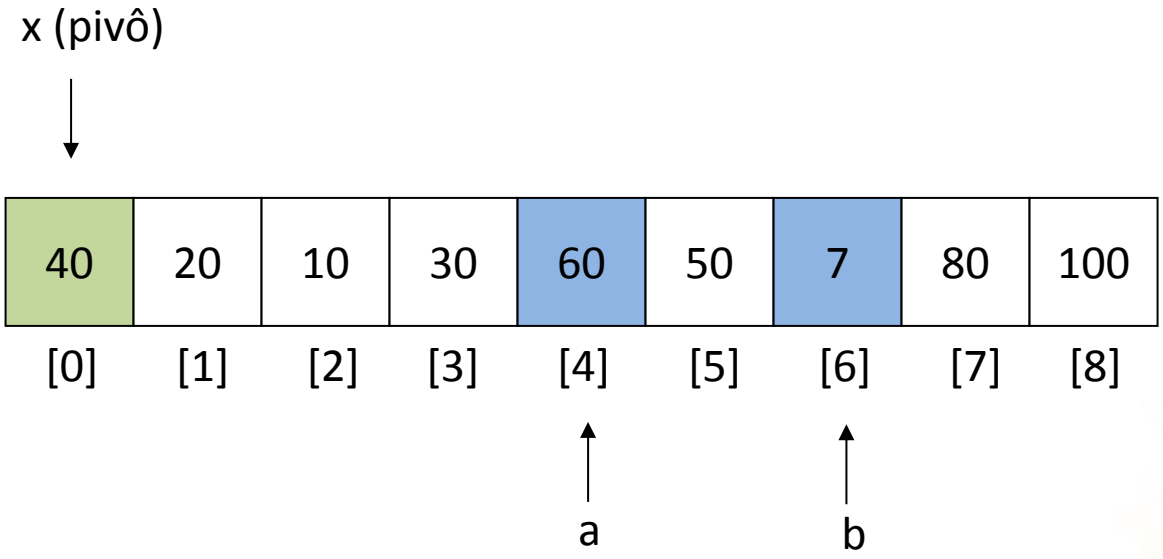
```
do{
  while (a < n && v[a] <= x)
    a++;
  while (v[b] > x)
    b--;
  if (a < b)
    troca(&v[a], &v[b]);
} while (a <= b);
```



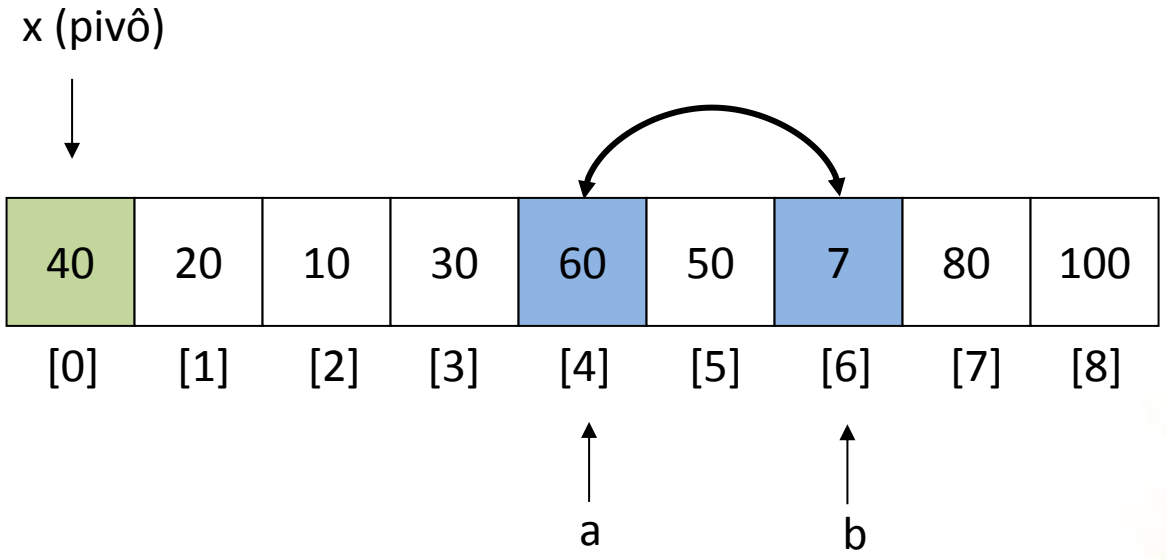
```
do{
  while (a < n && v[a] <= x)
    a++;
  while (v[b] > x)
    b--;
  if (a < b)
    troca(&v[a], &v[b]);
} while (a <= b);
```



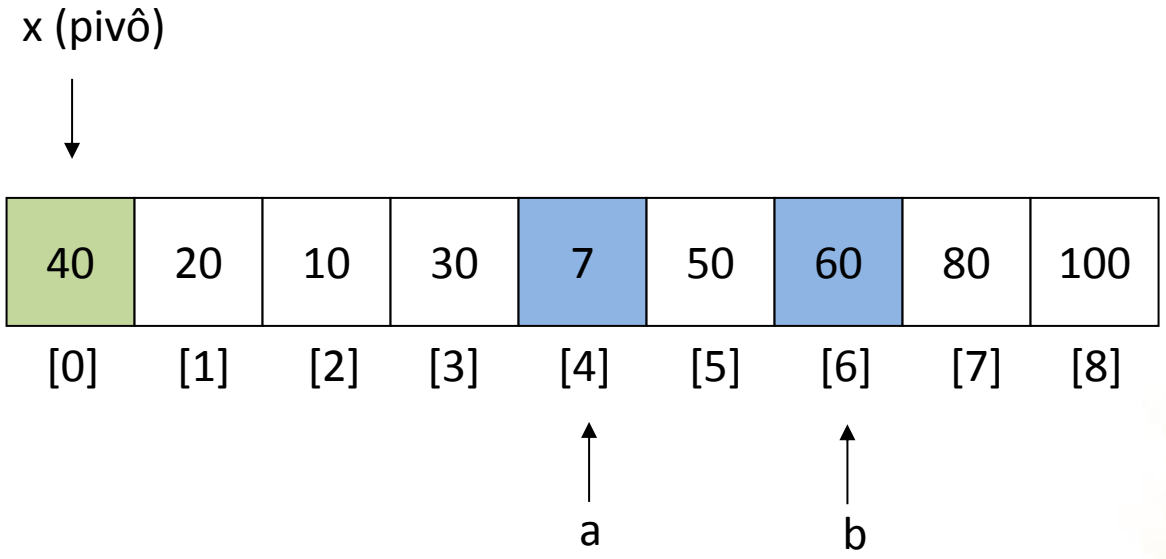
```
do{
  while (a < n && v[a] <= x)
    a++;
  while (v[b] > x)
    b--;
  if (a < b)
    troca(&v[a], &v[b]);
} while (a <= b);
```



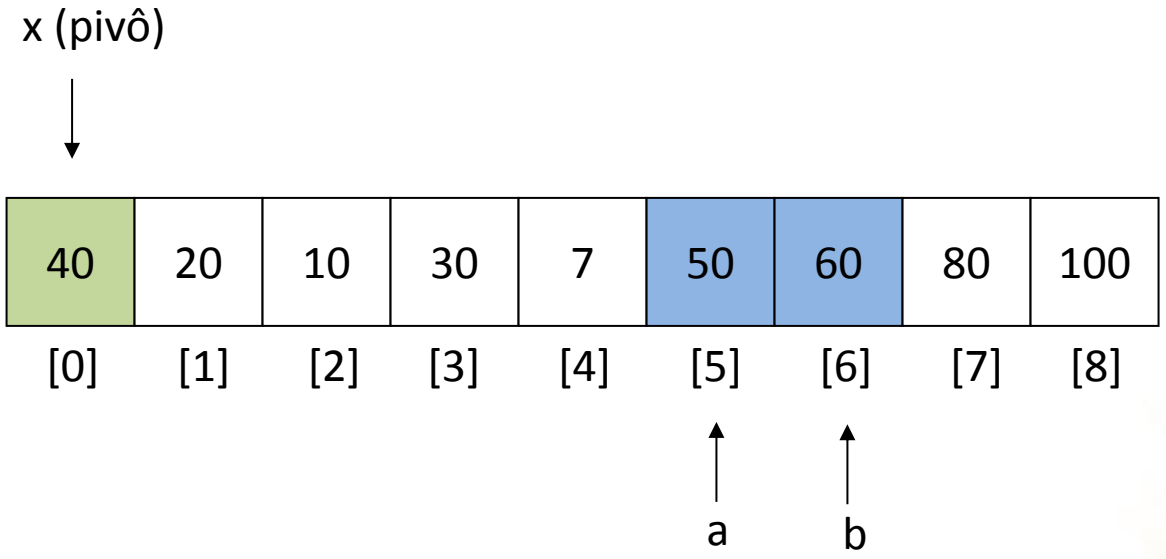
```
do{
  while (a < n && v[a] <= x)
    a++;
  while (v[b] > x)
    b--;
  if (a < b)
    troca(&v[a], &v[b]);
} while (a <= b);
```



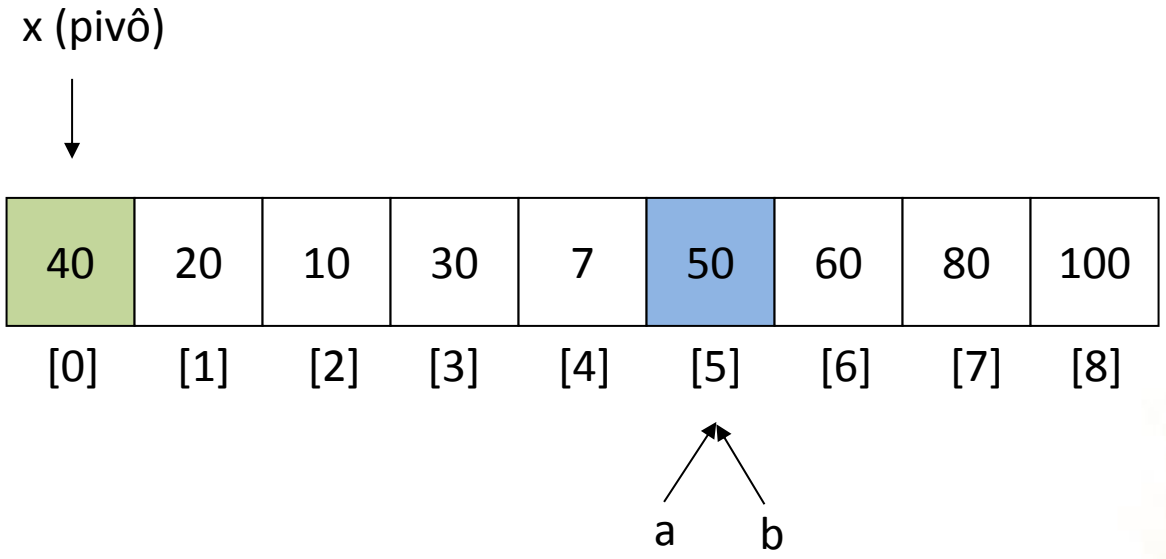
```
do{
  while (a < n && v[a] <= x)
    a++;
  while (v[b] > x)
    b--;
  if (a < b)
    troca(&v[a], &v[b]);
} while (a <= b);
```



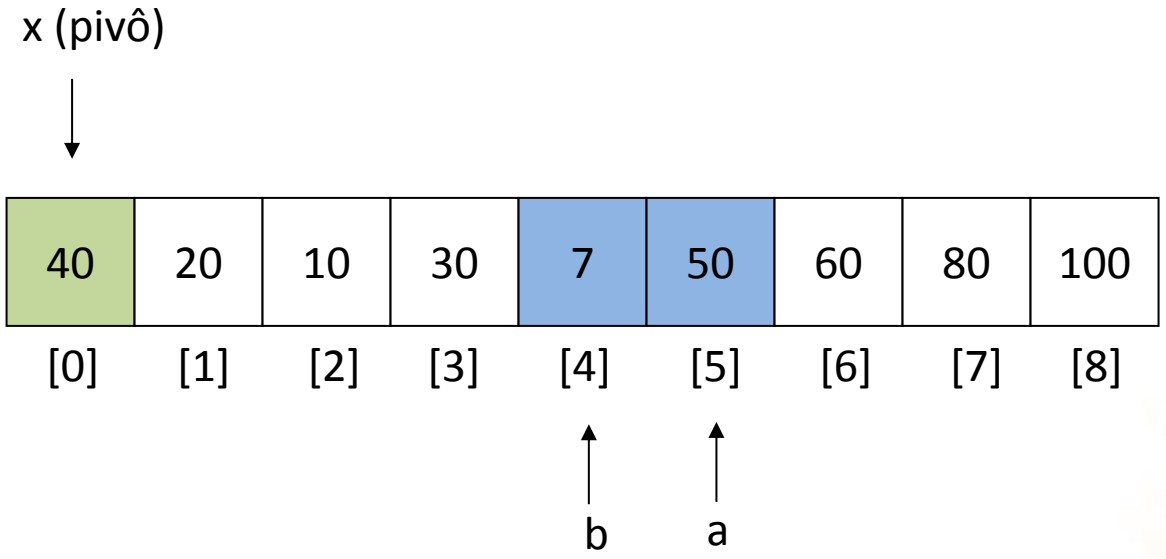
```
do{
  while (a < n && v[a] <= x)
    a++;
  while (v[b] > x)
    b--;
  if (a < b)
    troca(&v[a], &v[b]);
} while (a <= b);
```



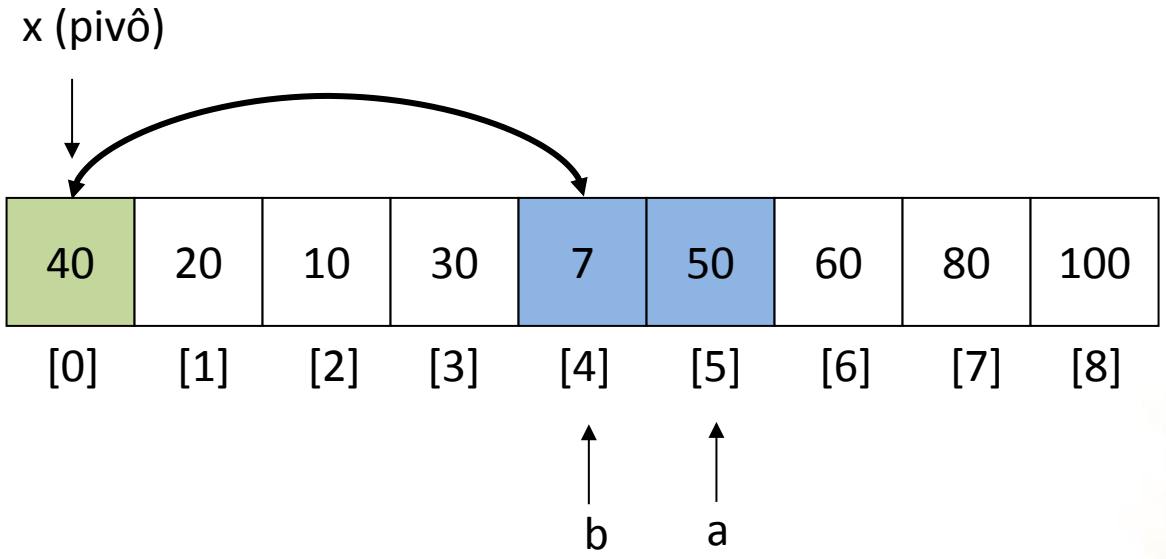
```
do{
  while (a < n && v[a] <= x)
    a++;
  while (v[b] > x)
    b--;
  if (a < b)
    troca(&v[a], &v[b]);
} while (a <= b);
```



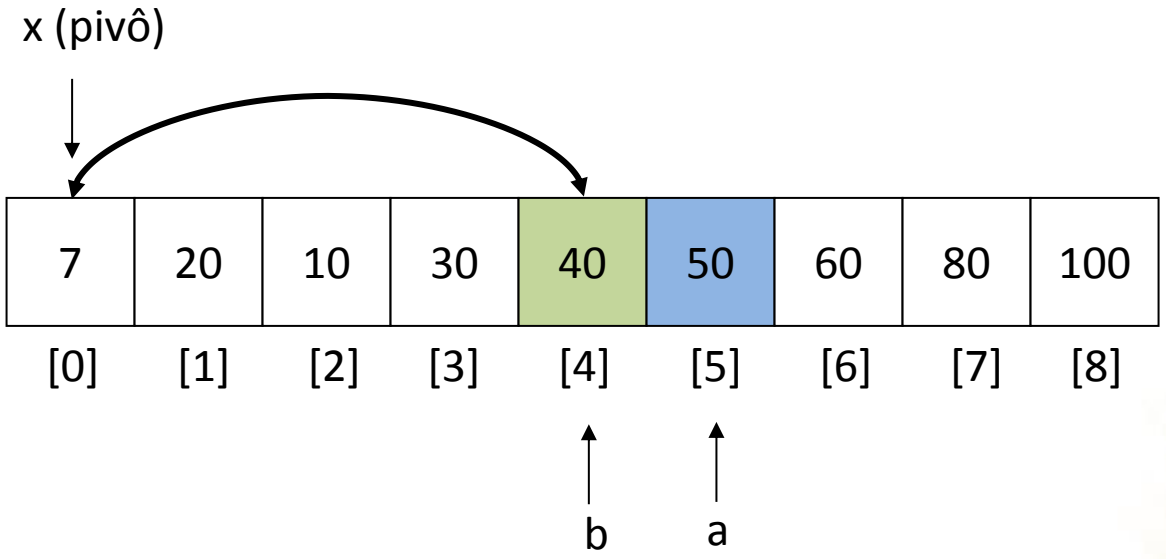
```
do{
  while (a < n && v[a] <= x)
    a++;
  while (v[b] > x)
    b--;
  if (a < b)
    troca(&v[a], &v[b]);
} while (a <= b);
```



```
do{
  while (a < n && v[a] <= x)
    a++;
  while (v[b] > x)
    b--;
  if (a < b)
    troca(&v[a], &v[b]);
} while (a <= b);
troca(&v[x], &v[b]);
```

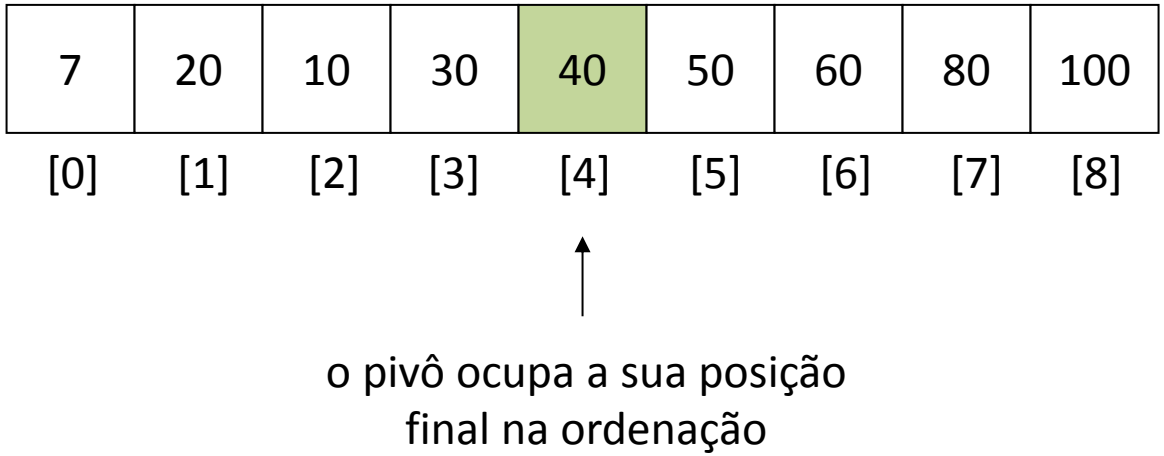


```
do{
  while (a < n && v[a] <= x)
    a++;
  while (v[b] > x)
    b--;
  if (a < b)
    troca(&v[a], &v[b]);
} while (a <= b);
troca(&v[x], &v[b]);
```



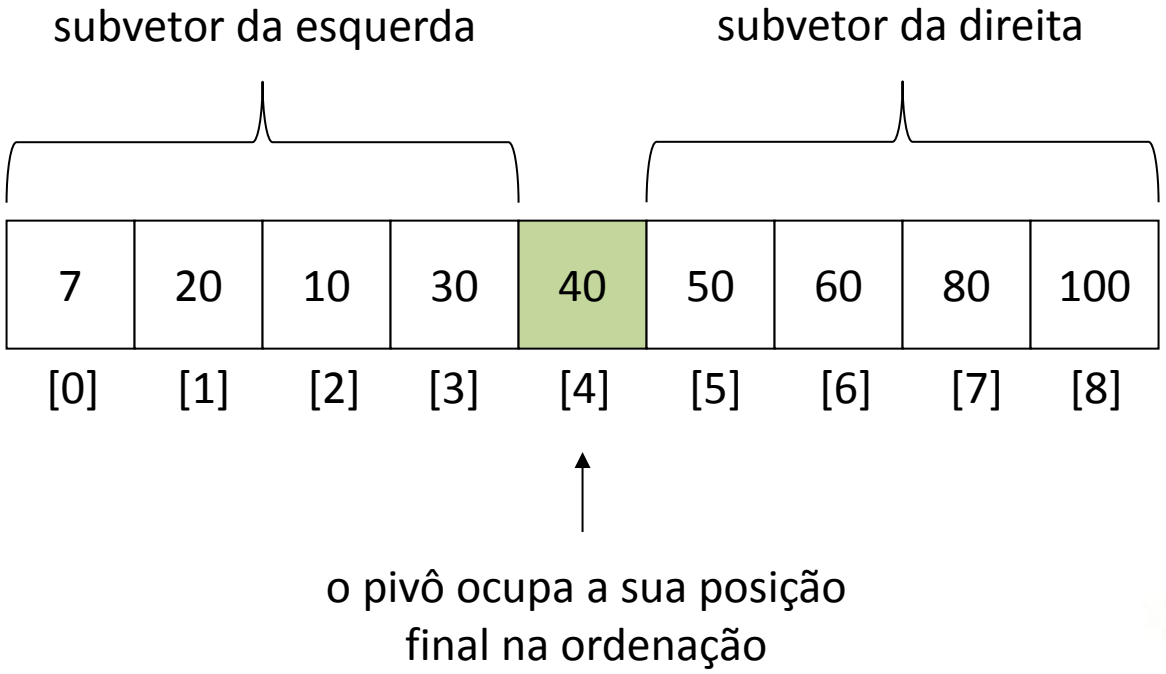
Quick Sort

- Resultado da Partição:



Quick Sort

- Chamada recursiva aos subvetores:



```
void quicksort(int n, int* v){
  int x, a, b, temp;
  if (n > 1) {
    x = v[0]; a = 1; b = n-1;
    do {
      while (a < n && v[a] <= x)
        a++;
      while (v[b] > x)
        b--;
      if (a < b) {
        temp = v[a];
        v[a] = v[b];
        v[b] = temp;
        a++; b--;
      }
    } while (a <= b);
    v[0] = v[b];
    v[b] = x;
    quicksort(b,v);
    quicksort(n-a,&v[a]);
  }
}
```

Caminha com o índice a

Caminha com o índice b

Faz a troca de a e b

Faz a troca do pivô e b

Chamada recursiva para o subvetor da esquerda e da direita

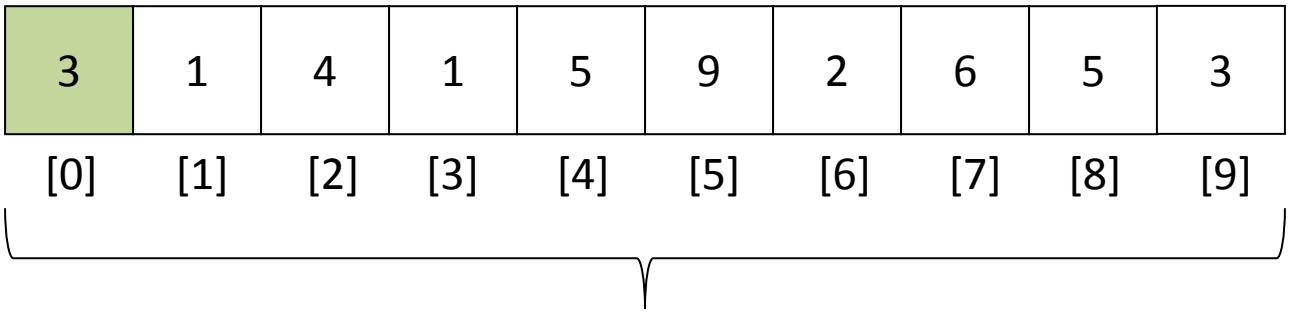
Quick Sort

(1) Vetor para ser ordenado:

3	1	4	1	5	9	2	6	5	3
[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]

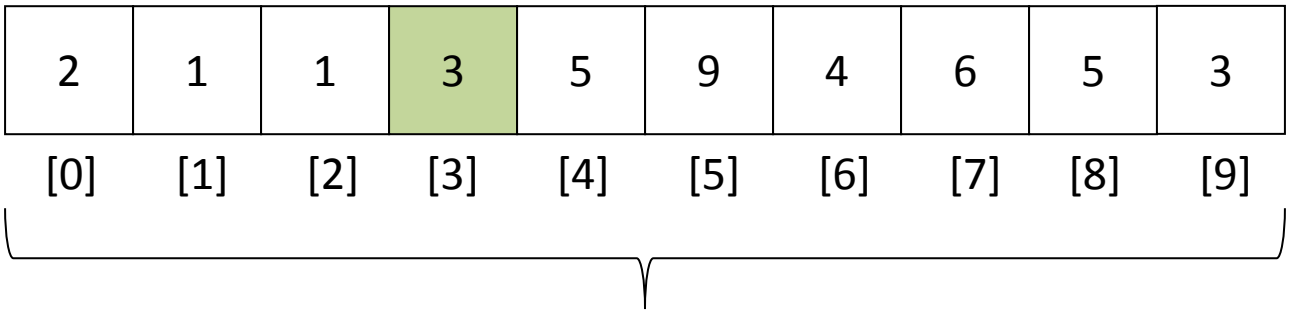
Quick Sort

(2) Selecione o pivô:



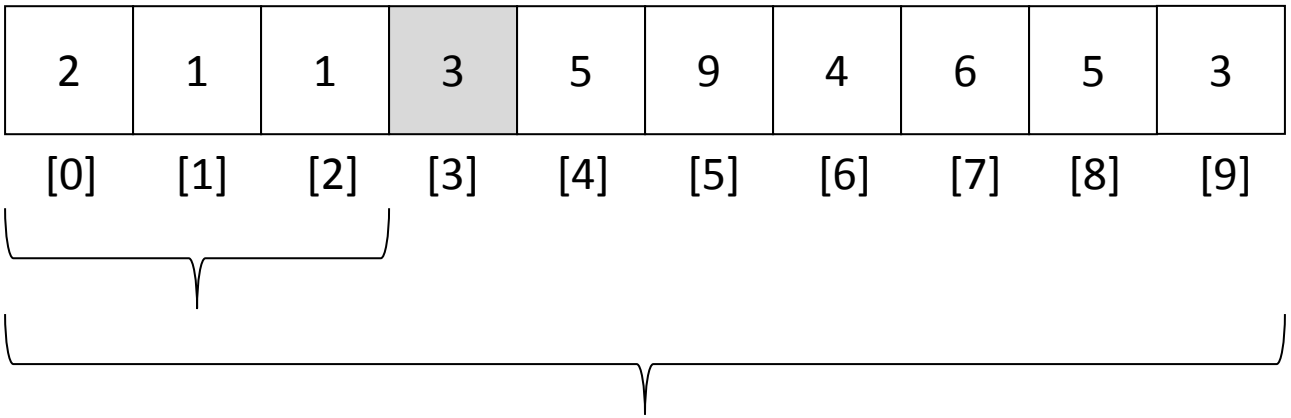
Quick Sort

(3) Particione o vetor. Todos os elementos maiores que o pivô ficaram na direita e todos os elementos menores na esquerda. O pivô já está ordenado:



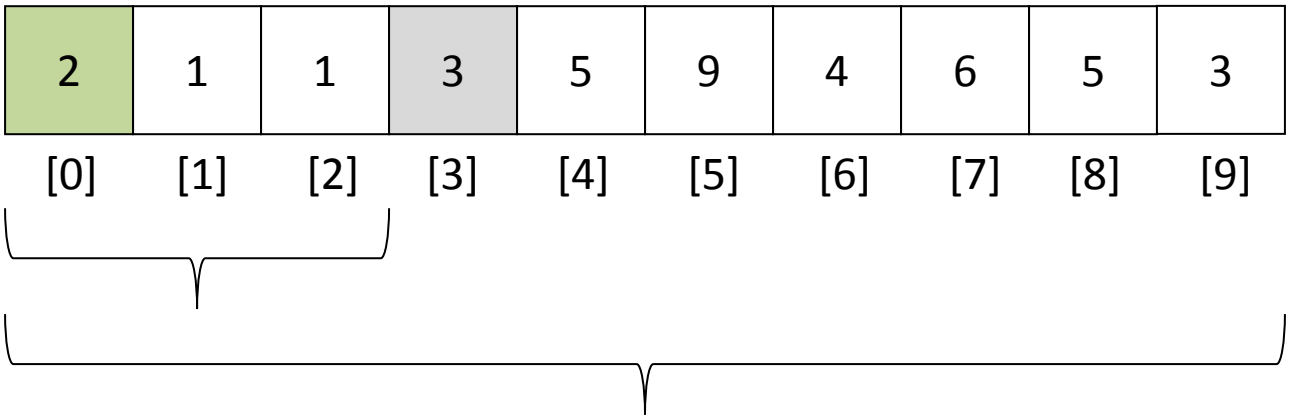
Quick Sort

(4) Chame recursivamente o quick sort para o subvetor da esquerda:



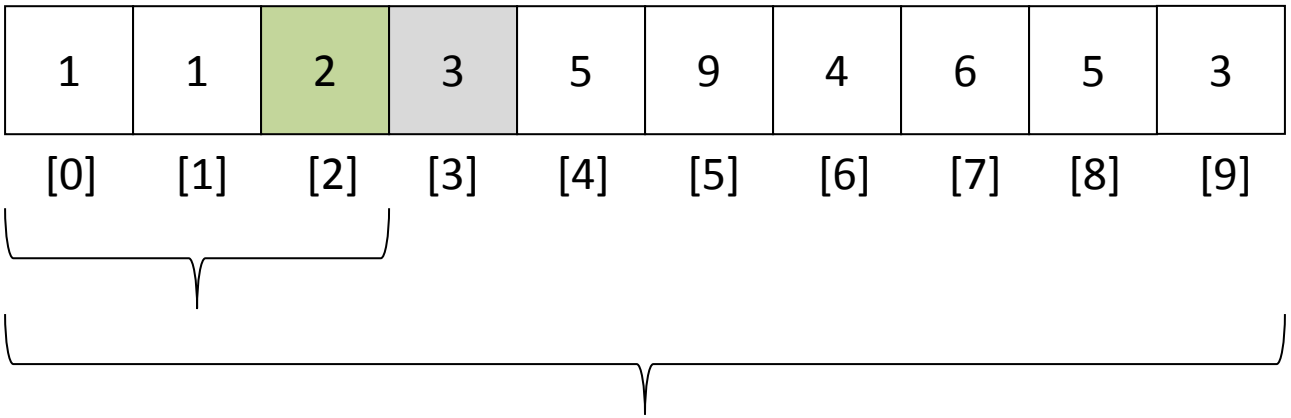
Quick Sort

(5) Selecione o pivô:



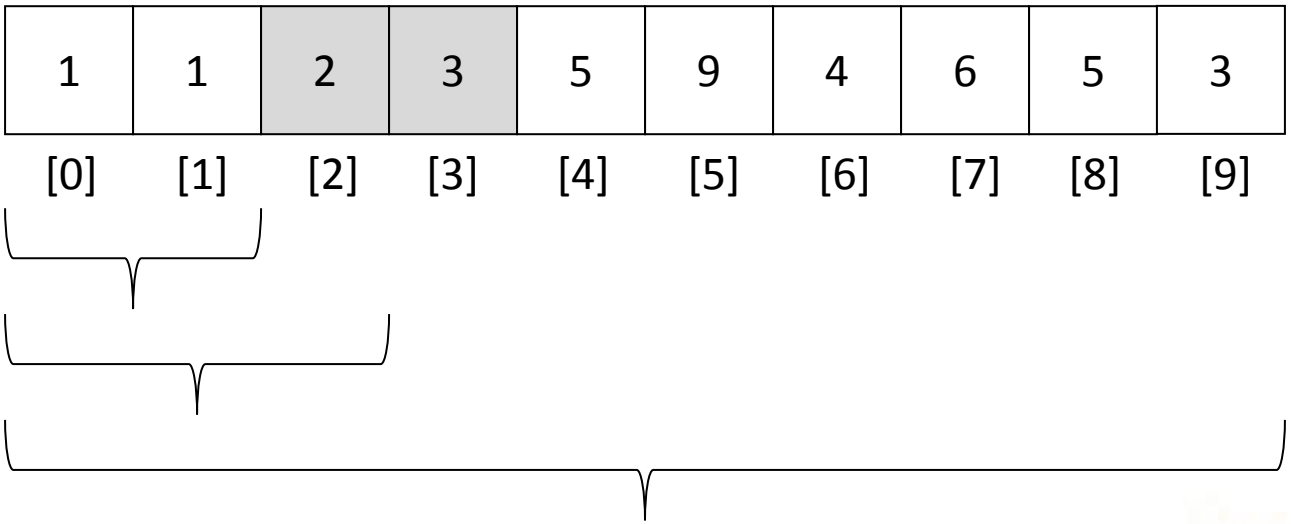
Quick Sort

(6) Particione o vetor. Todos os elementos maiores que o pivô ficaram na direita e todos os elementos menores na esquerda. O pivô já está ordenado:



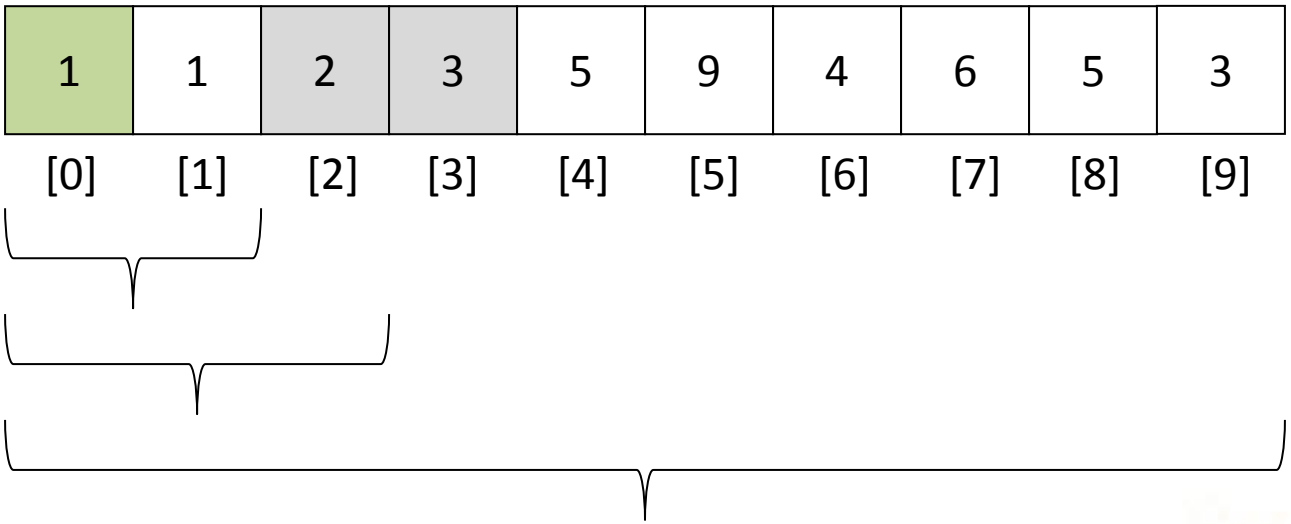
Quick Sort

(7) Chame recursivamente o quick sort para o subvetor da esquerda:



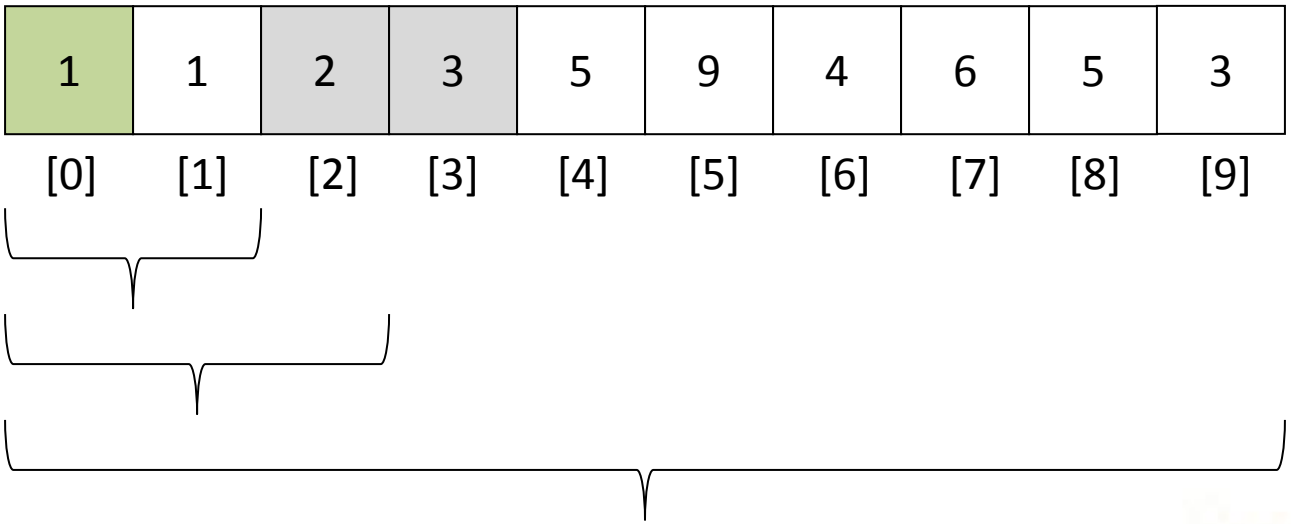
Quick Sort

(8) Selecione o pivô:



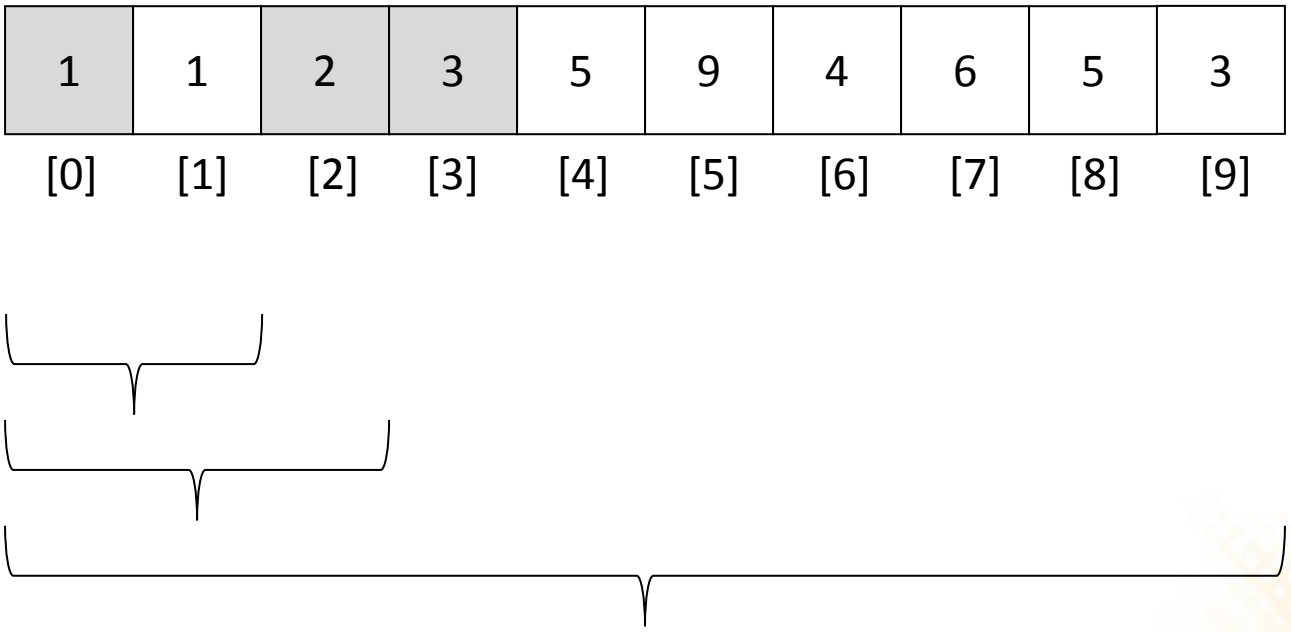
Quick Sort

(9) Particione o vetor. Todos os elementos maiores que o pivô ficaram na direita e todos os elementos menores na esquerda. O pivô já está ordenado:



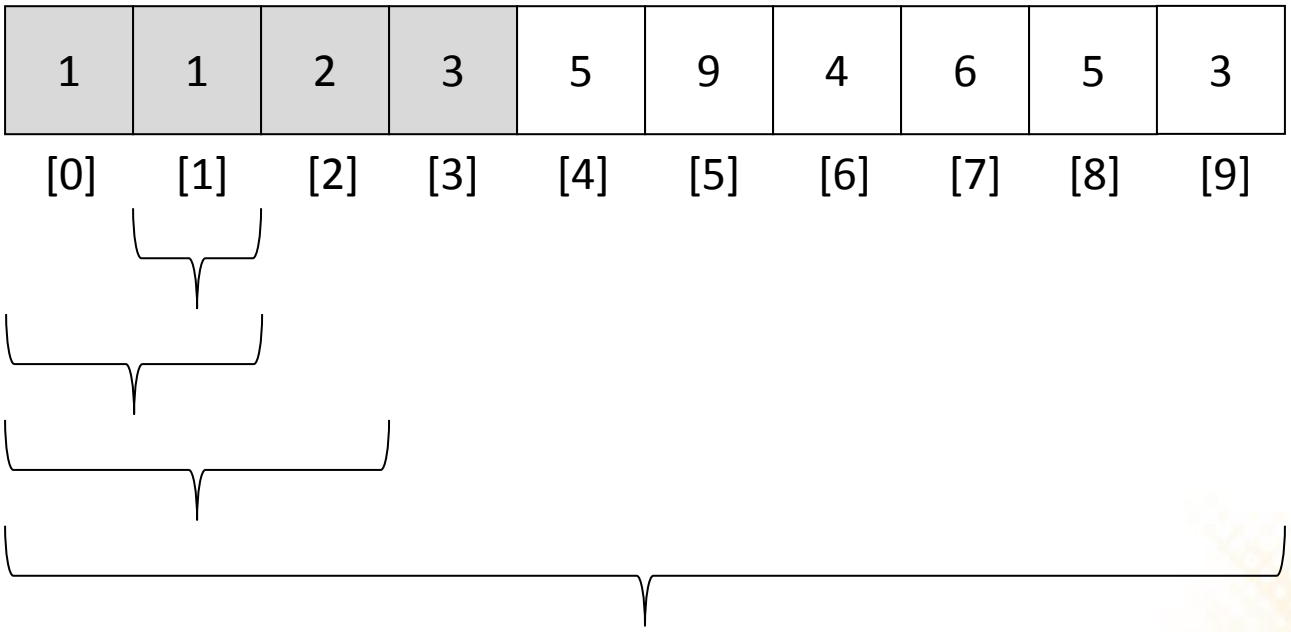
Quick Sort

(10) Chame recursivamente o quick sort para o subvetor da esquerda. O tamanho do vetor da esquerda é zero. A recursão retorna.



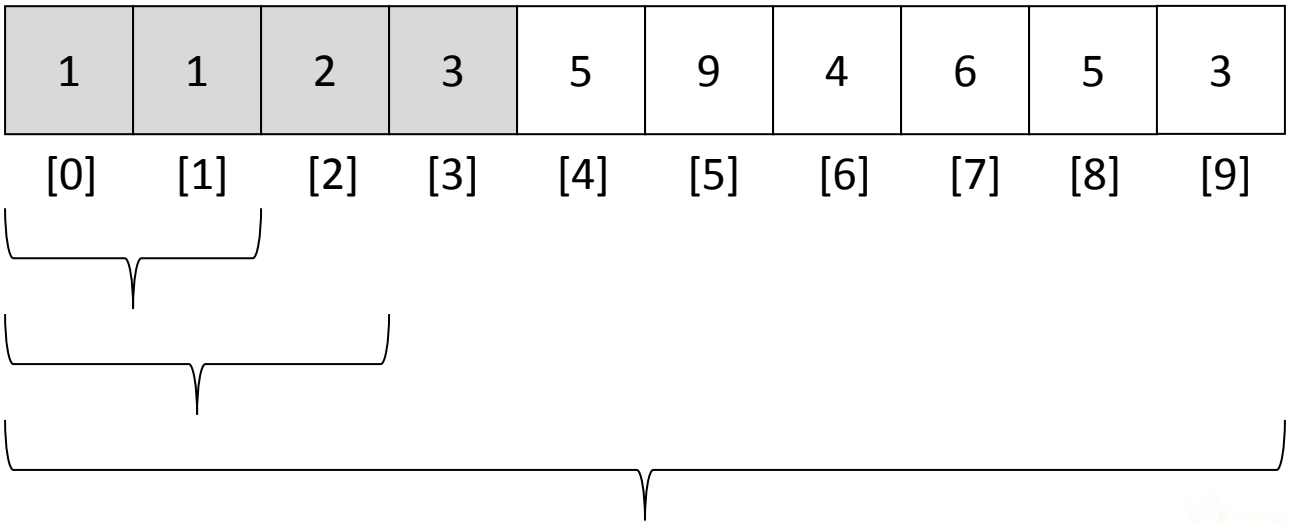
Quick Sort

(11) Chame recursivamente o quick sort para o subvetor da direita. Só existe um elemento, então ele já está ordenado e a recursão retorna.



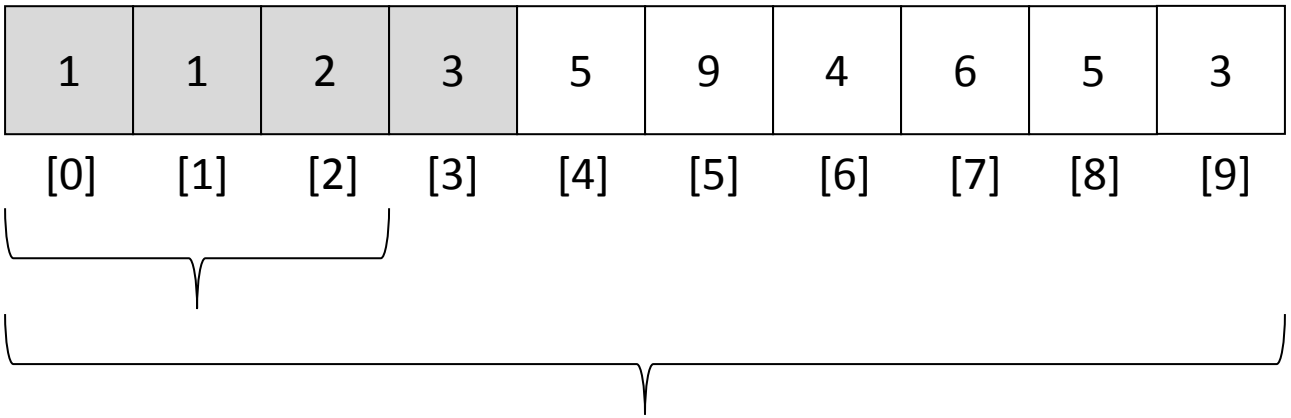
Quick Sort

(12) A recursão retorna. Não tem nada mais para ser feito nesse subvetor:



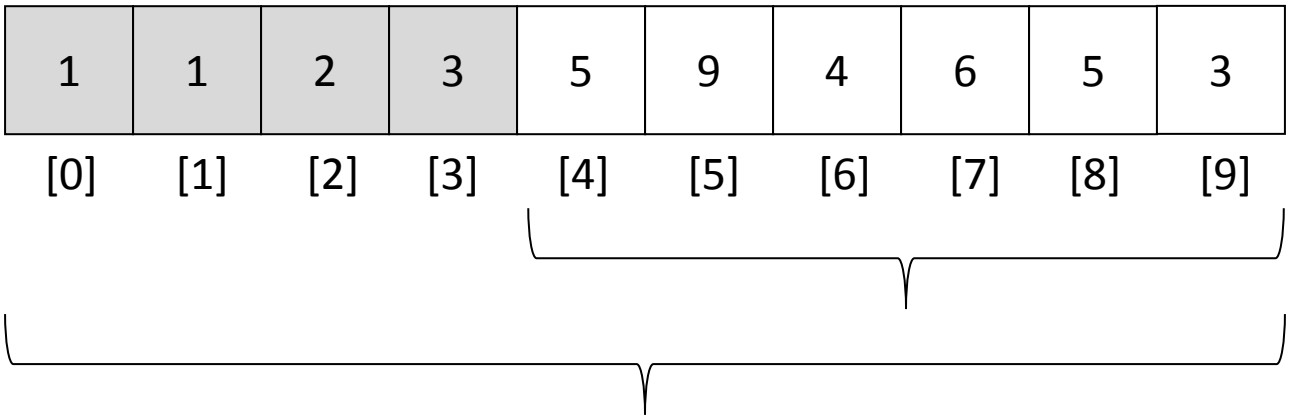
Quick Sort

(13) A recursão retorna. Não tem nada mais para ser feito nesse subvetor:



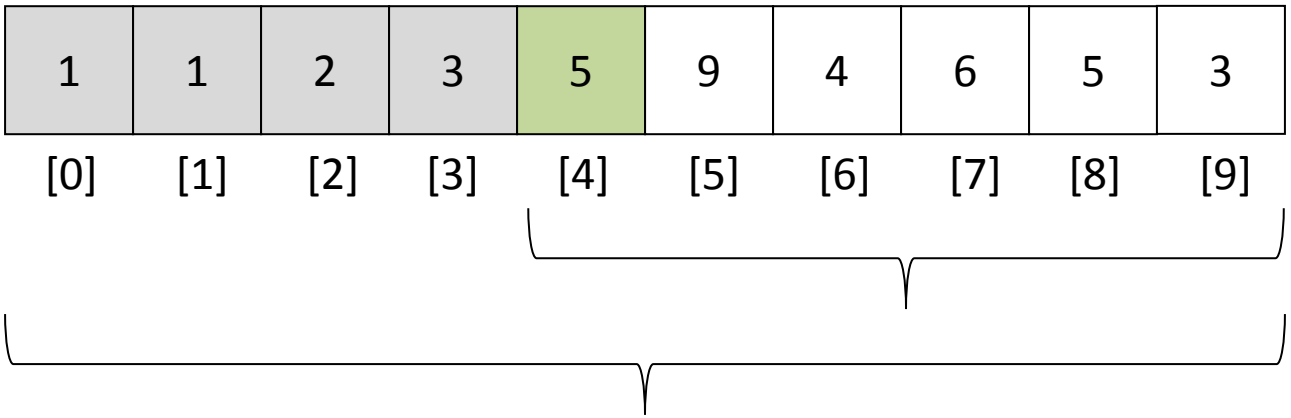
Quick Sort

(14) Chame recursivamente o quick sort para o subvetor da direita:



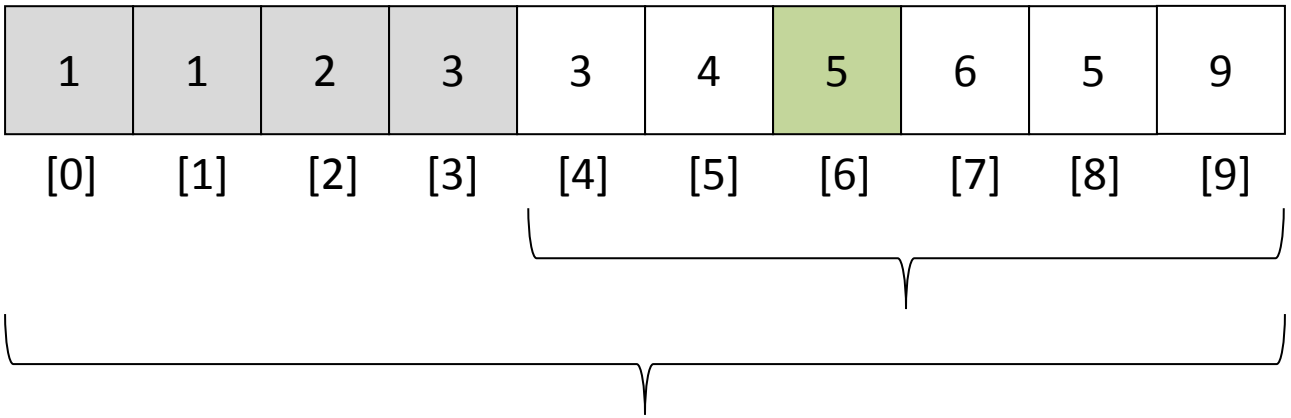
Quick Sort

(15) Selecione o pivô:



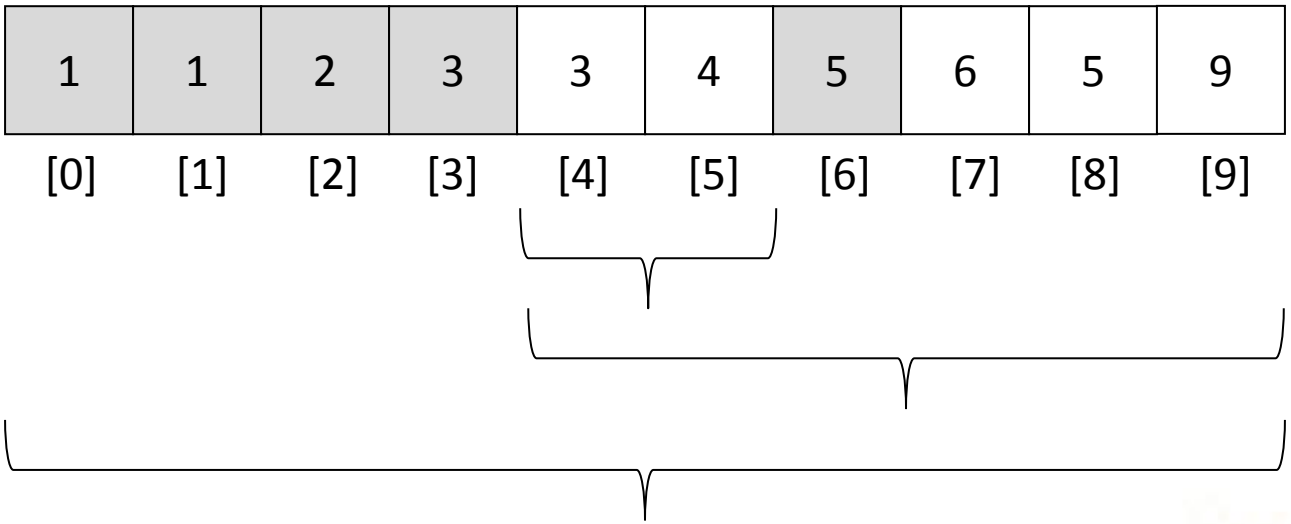
Quick Sort

(16) Particione o vetor. Todos os elementos maiores que o pivô ficaram na direita e todos os elementos menores na esquerda. O pivô já está ordenado:



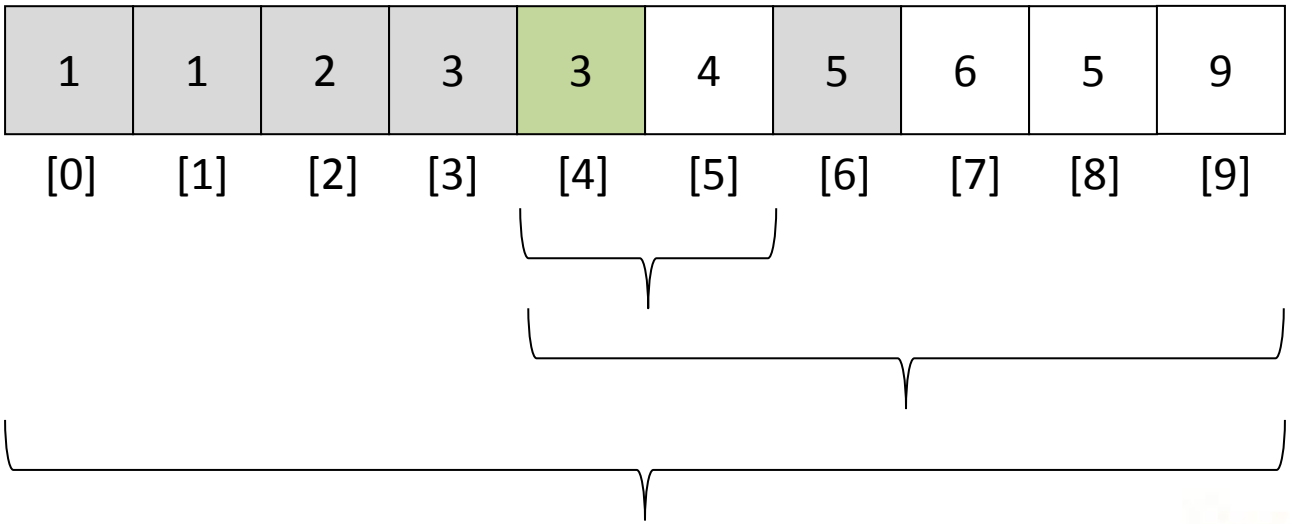
Quick Sort

(17) Chame recursivamente o quick sort para o subvetor da esquerda:



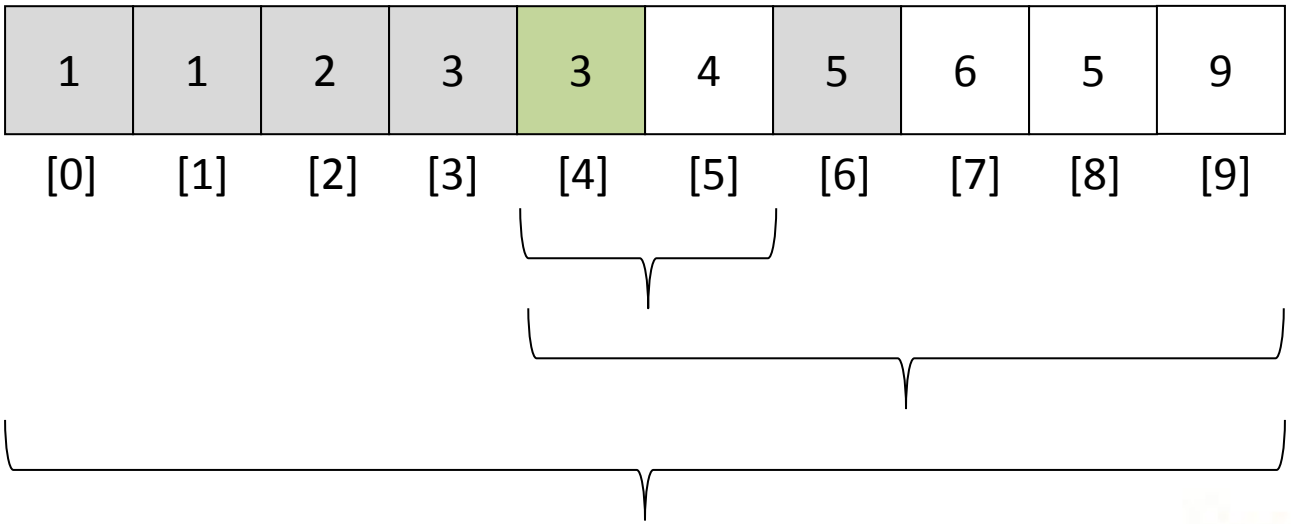
Quick Sort

(18) Selecione o pivô:



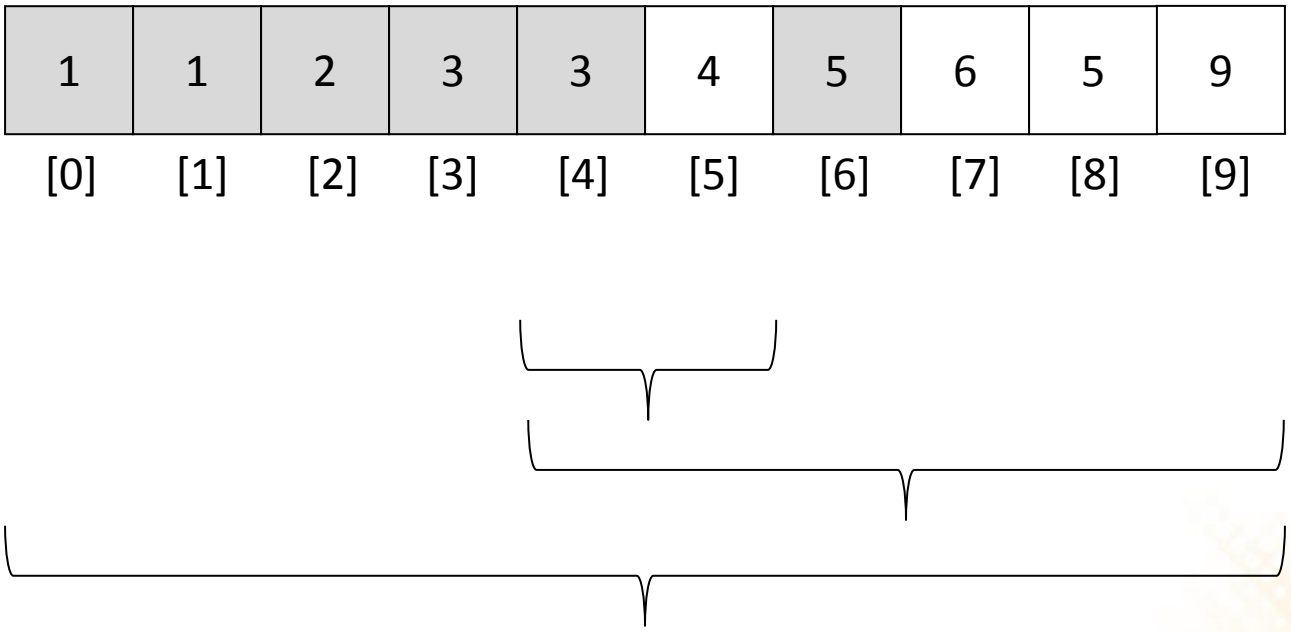
Quick Sort

(19) Particione o vetor. Todos os elementos maiores que o pivô ficaram na direita e todos os elementos menores na esquerda. O pivô já está ordenado:



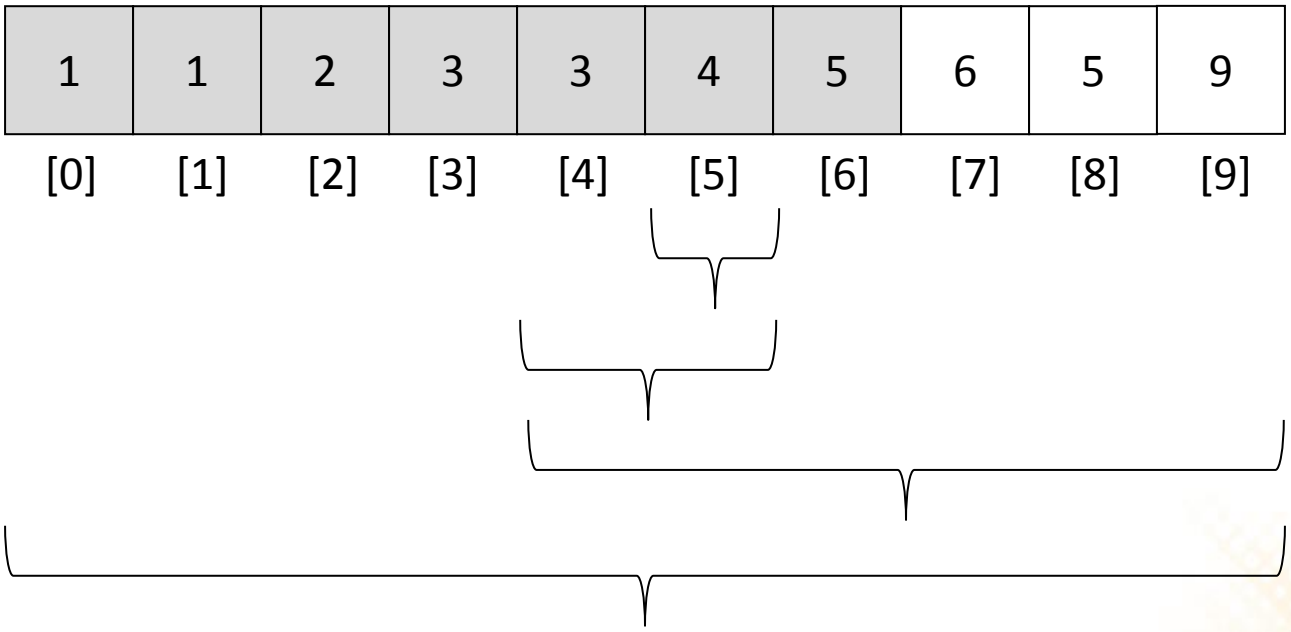
Quick Sort

(20) Chame recursivamente o quick sort para o subvetor da esquerda. O tamanho do vetor da esquerda é zero. A recursão retorna.



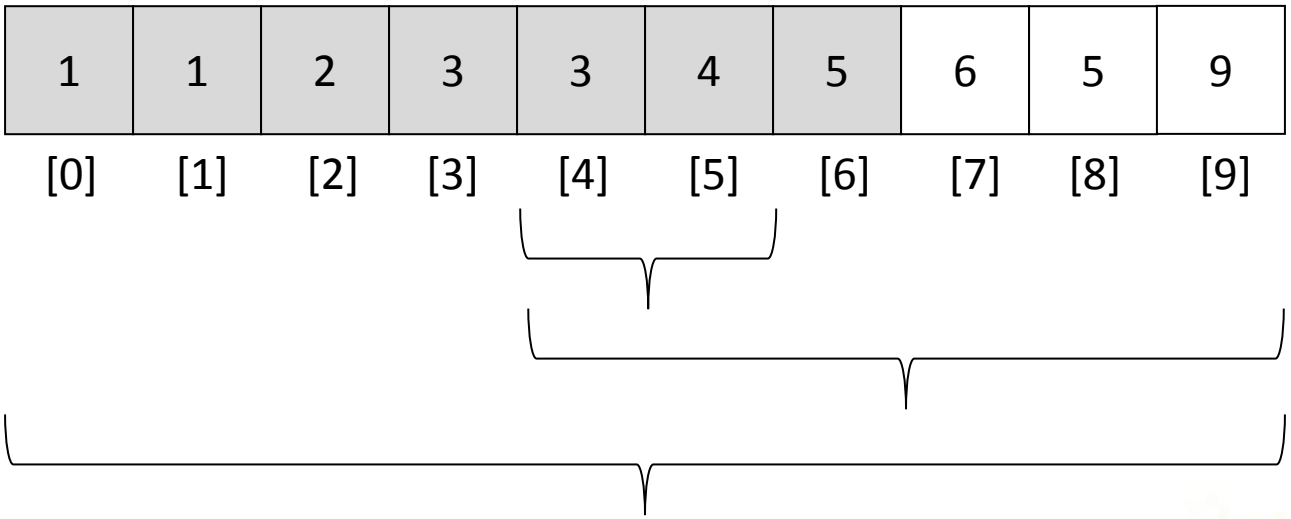
Quick Sort

(21) Chame recursivamente o quick sort para o subvetor da direita. Só existe um elemento, então ele já está ordenado e a recursão retorna.



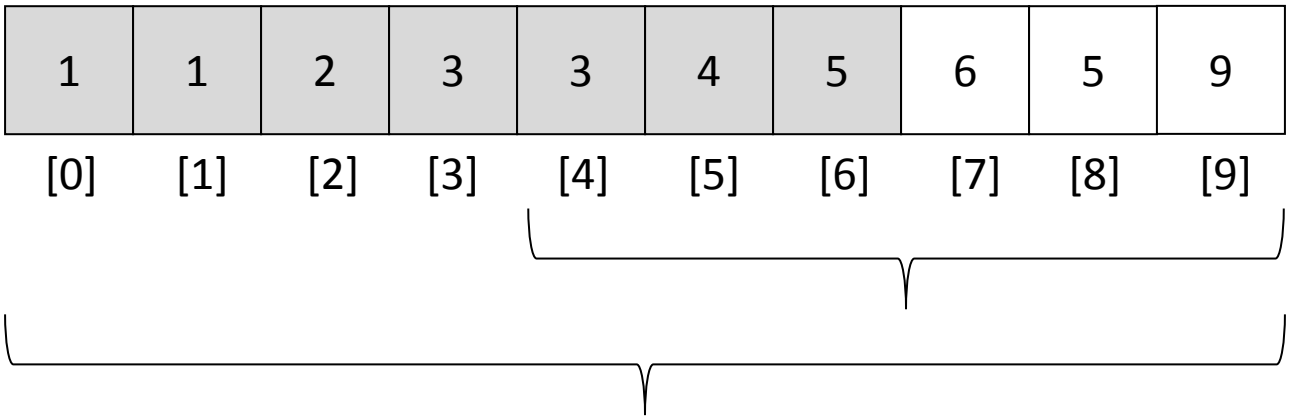
Quick Sort

(22) A recursão retorna. Não tem nada mais para ser feito nesse subvetor.



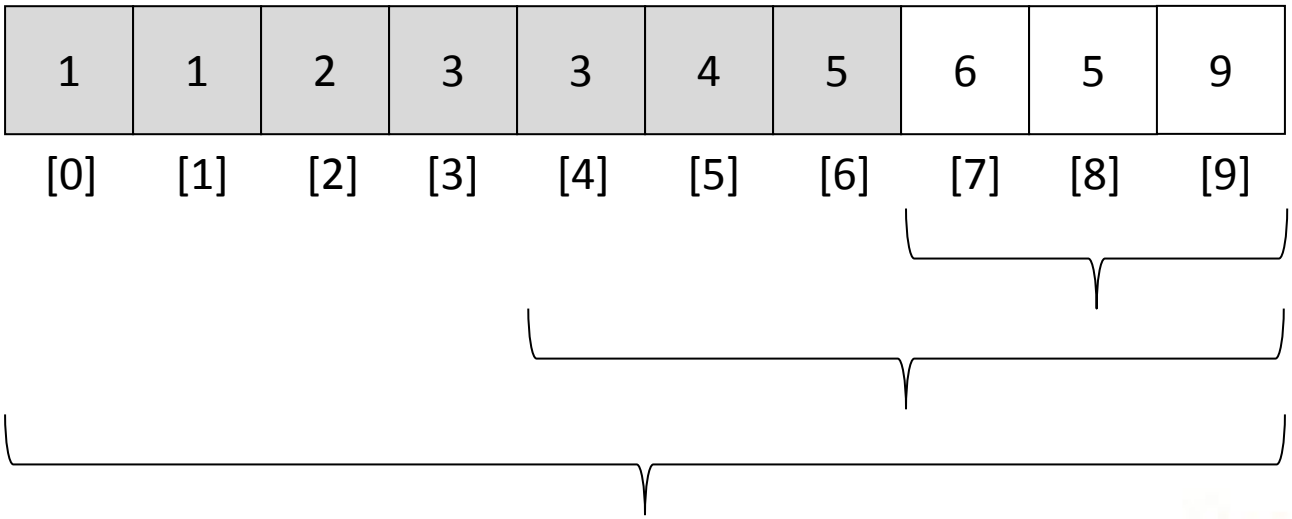
Quick Sort

(23) A recursão retorna. Não tem nada mais para ser feito nesse subvetor.



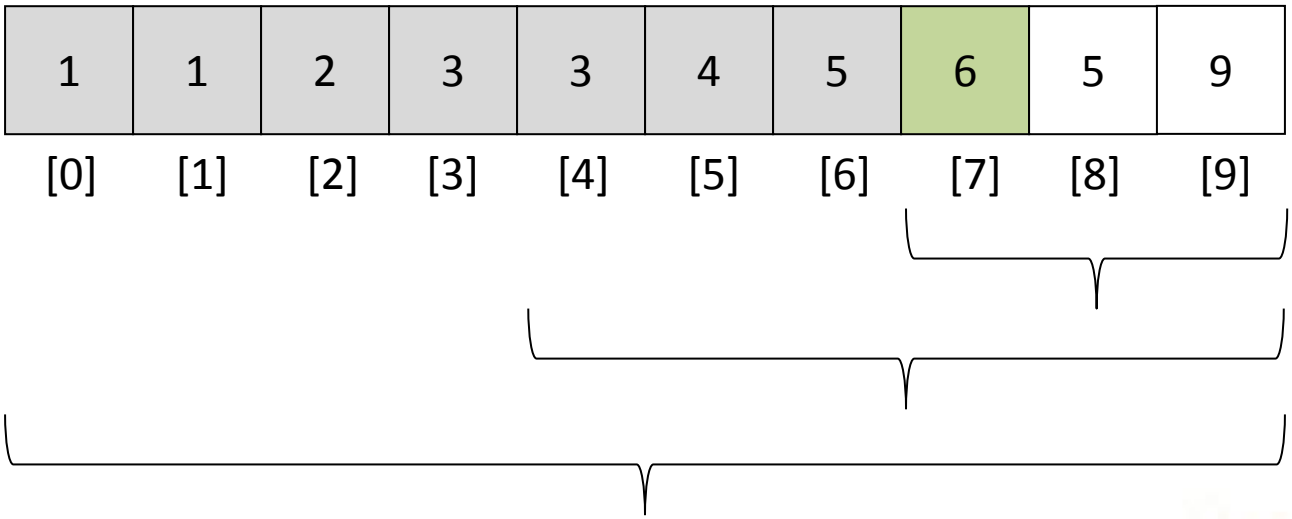
Quick Sort

(24) Chame recursivamente o quick sort para o subvetor da direita:



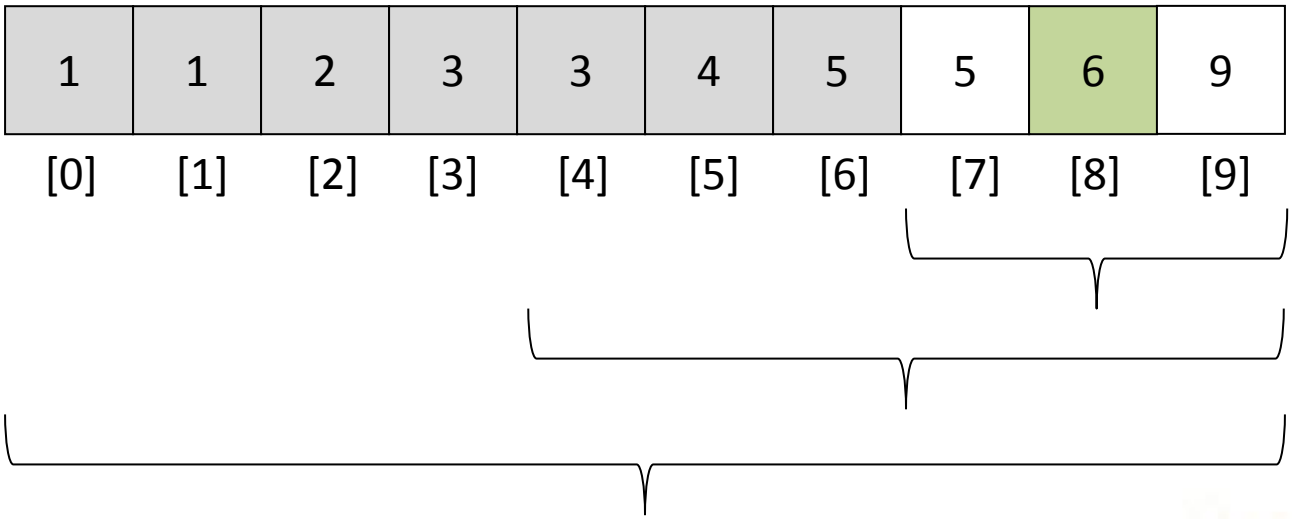
Quick Sort

(25) Selecione o pivô:



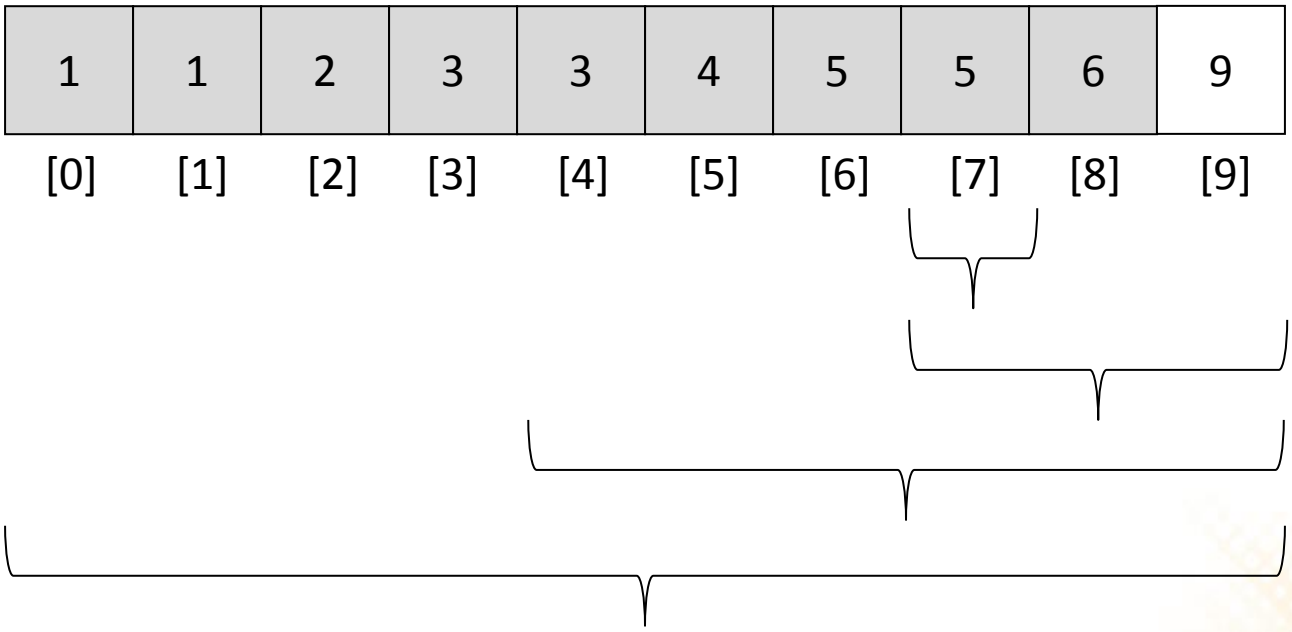
Quick Sort

(26) Particione o vetor. Todos os elementos maiores que o pivô ficaram na direita e todos os elementos menores na esquerda. O pivô já está ordenado:



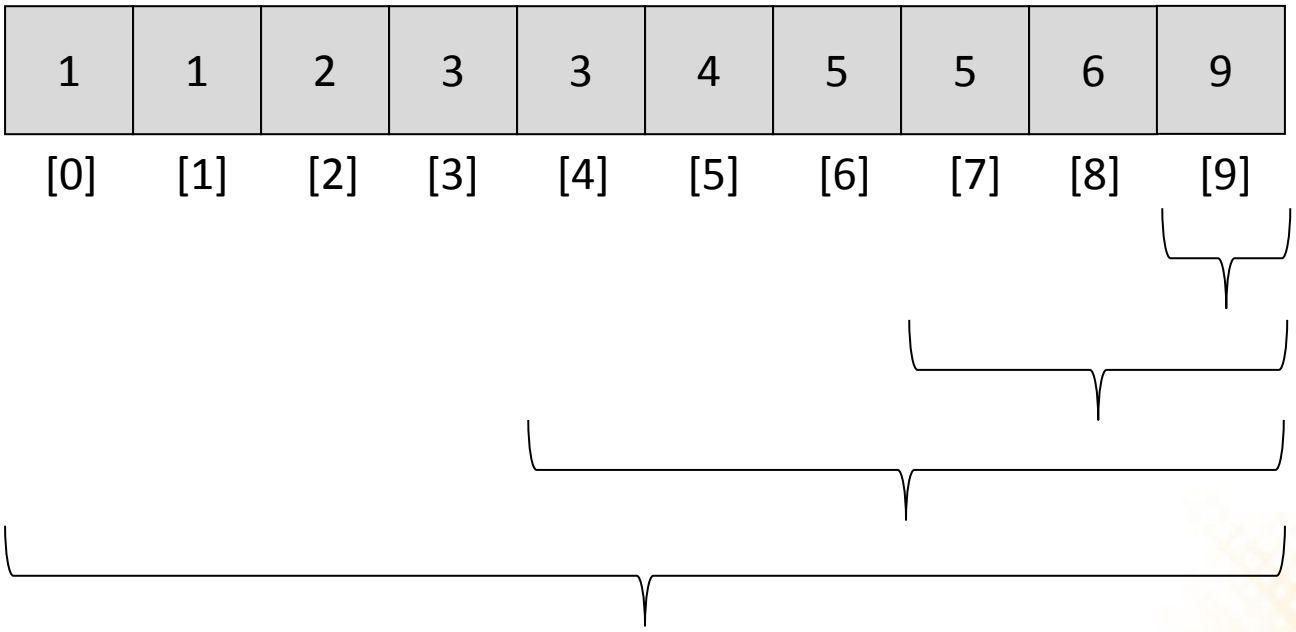
Quick Sort

(27) Chame recursivamente o quick sort para o subvetor da esquerda. Só existe um elemento, então ele já está ordenado e a recursão retorna:



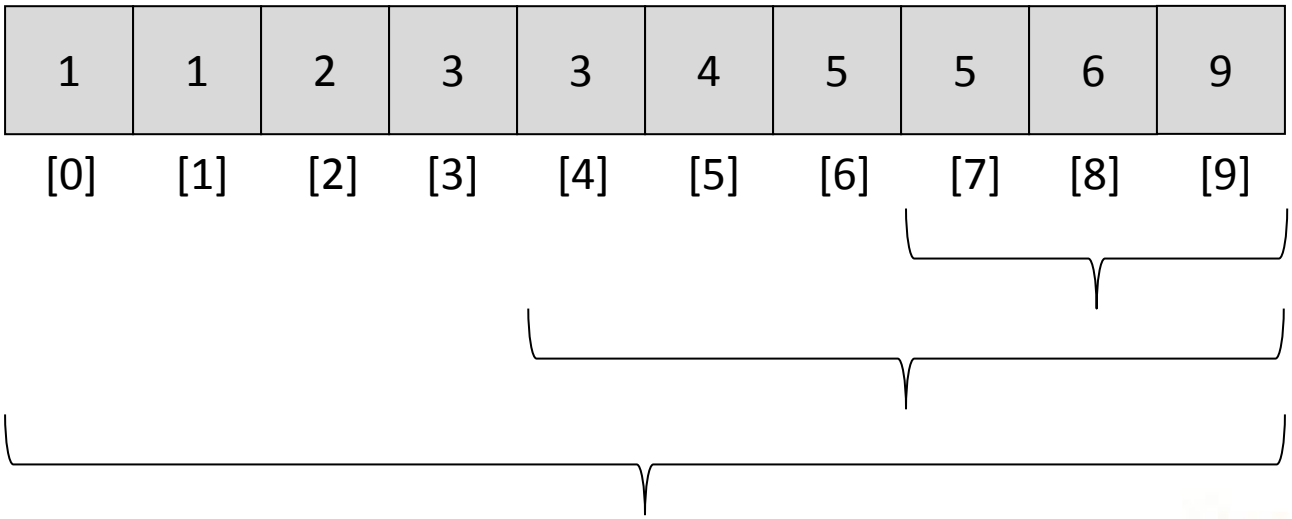
Quick Sort

(28) Chame recursivamente o quick sort para o subvetor da direita. Só existe um elemento, então ele já está ordenado e a recursão retorna:



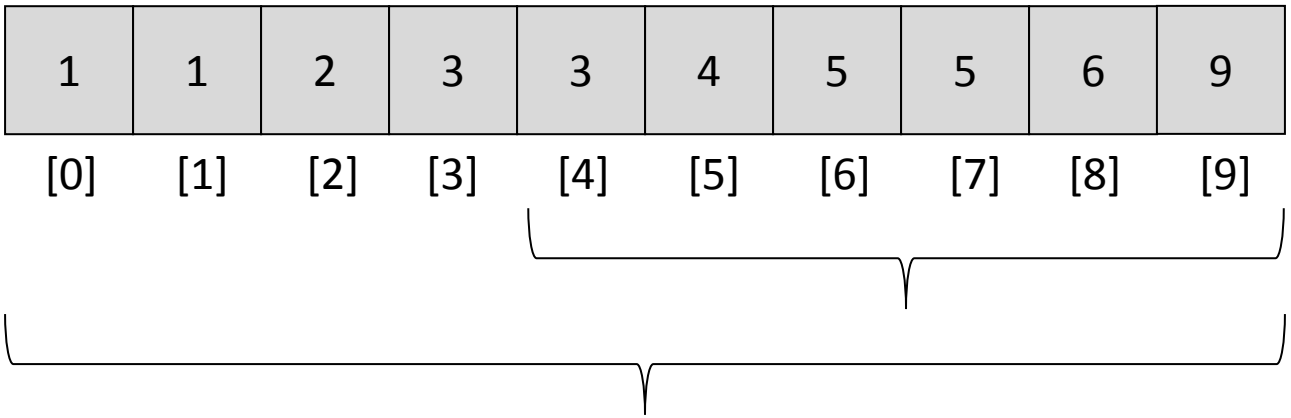
Quick Sort

(29) A recursão retorna. Não tem nada mais para ser feito nesse subvetor.



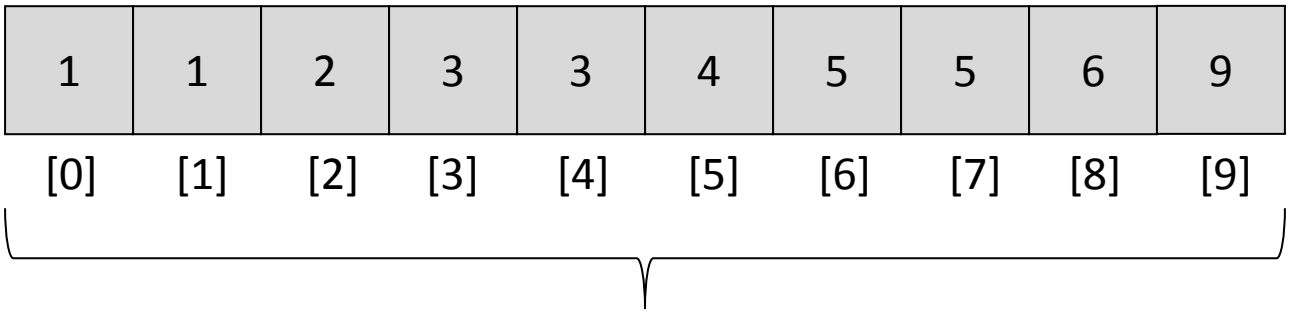
Quick Sort

(30) A recursão retorna. Não tem nada mais para ser feito nesse subvetor.



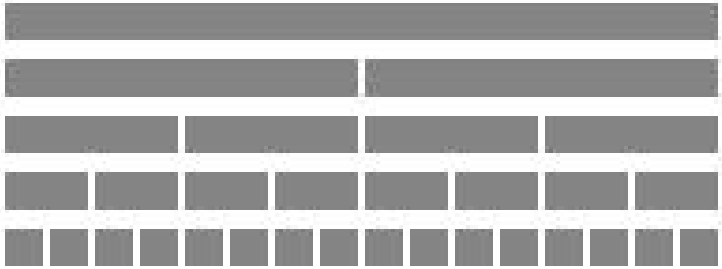
Quick Sort

(31) A recursão retorna para a primeira chamada do quick sort com o vetor completamente ordenado.



Quick Sort - Complexidade

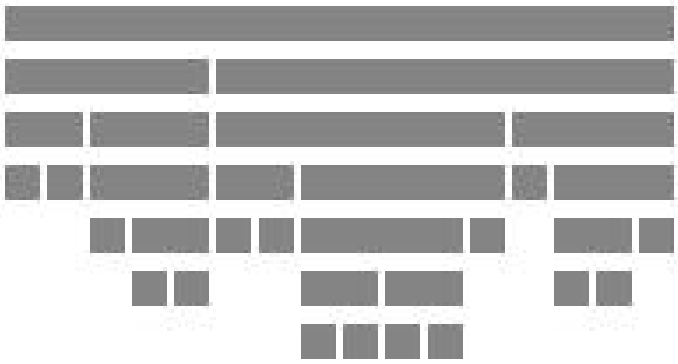
- **Melhor caso:**
  - Pivô representa o valor mediano do conjunto dos elementos do vetor;
  - Após mover o pivô para sua posição, restarão dois sub-vetores para serem ordenados, ambos com o número de elementos reduzido à metade, em relação ao vetor original;



  - Complexidade: $T(n) = 2T(n/2)+n = n \log n - n + 1 =$ **$O(n \log n)$**

Quick Sort - Complexidade

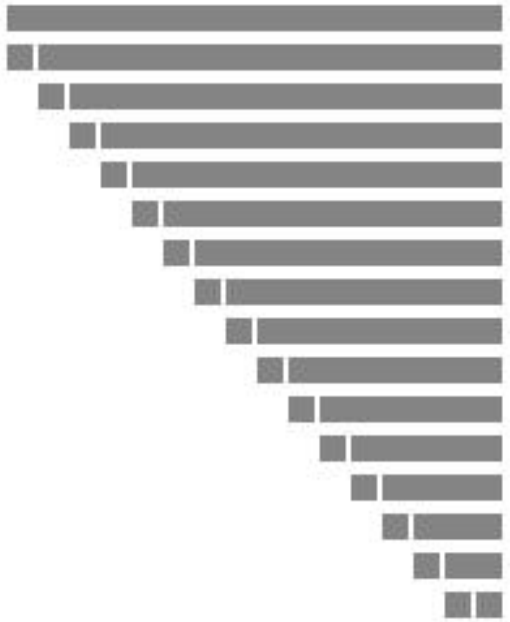
- **Caso médio:**
  - De acordo com Sedgewick e Flajolet (1996, p. 17), o número de comparações é aproximadamente: $T(n) \approx 1.386\ n \log n - 0.846$



  - Complexidade: $T(n) = \mathbf{O(n \log n)}$

Quick Sort - Complexidade

- **Pior caso:**
  - Pivô é o maior elemento e algoritmo recai em ordenação bolha;
  - Complexidade: T(n) = **$O(n^2)$**



Quick Sort

- Melhorias:
  - Eliminação da recursão;
  - Melhor seleção do pivô: mediana de 3 partições evita pior caso em conjuntos de dados ordenados;
  - Utilizar Insertion Sort conjuntos de dados pequenos;
  - Combinadas, essas melhorias fornecem um ganho de performance de aproximadamente 20-25%.

- O Quick Sort é considerado o melhor método para ordenação interna de grandes conjuntos de dados ($n \geq 10.000$).

Quick Sort

- Complexidade O(n log n)

- Vantagens:
  - Complexidade O(n log n)

- Desvantagens:
  - Tradicionalmente baseia-se em chamadas recursivas, mas é possível implementa-lo sem utilizar recursão;
  - Não é estável;

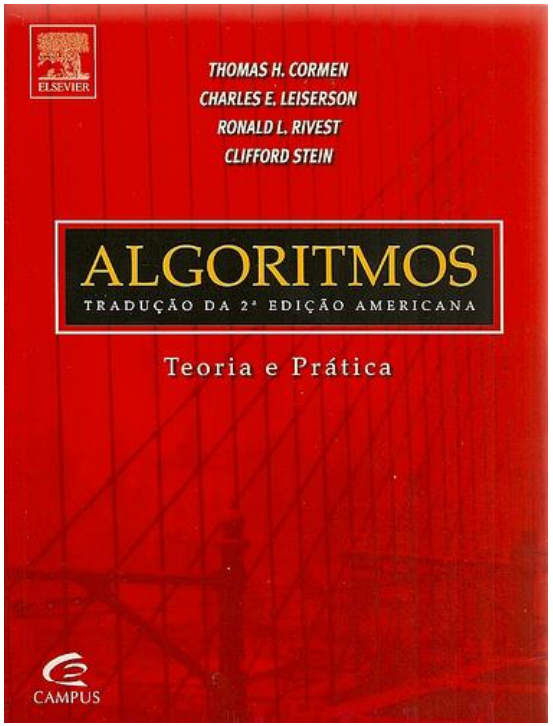
Exercícios

Lista de Exercícios 10 – Algoritmos de Ordenação

http://www.inf.puc-rio.br/~elima/paa/

Leitura Complementar

- Cormen, T., Leiserson, C., Rivest, R., e Stein, C. **Algoritmos – Teoria e Prática** (tradução da 2ª. Edição americana), Editora Campus, 2002.



- **Capítulo 4: Recorrências**

- **Capítulo 7: Quick Sort**