Projeto e Análise de Algoritmos

Aula 10 – Distâncias Mínimas

Edirlei Soares de Lima
<edirlei@iprj.uerj.br>

Distâncias Mínimas

- Dado um **grafo ponderado G = (V, E)**, um vértice *s* e um vértice *g*, obter o caminho mais "curto" (de peso total mínimo) de *s* para *g*.
  - O problema pode incluir origens e destinos únicos ou múltiplos.
  - Caminho mais curto pode não ser único;

- O caminho mais curto entre vértices de um grafo não ponderado é aquele que possui o **menor número de arestas**.

- O caminho mais curto entre os vértices de grafo ponderado é aquele cuja **soma dos pesos das arestas** possui o menor valor possível dentre todos os caminhos existentes entre os referidos vértices.
  - Em grafos ponderados, o menor caminho pode não ser aquele com menor número de arestas.

Algoritmo de Dijkstra

- O algoritmo de Dijkstra assemelha-se a busca em largura, mas é um **algoritmo guloso**, ou seja, toma a decisão que parece ótima no momento.

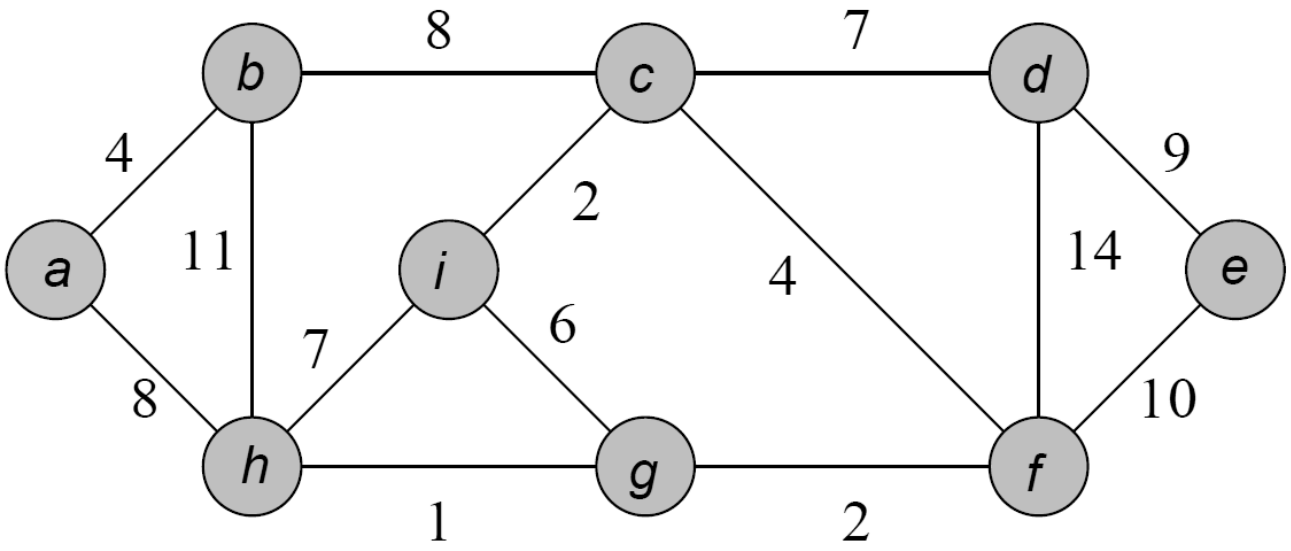
- O Dijkstra expande sempre o vértice de **menor custo de caminho**.
  - Se o custo de todos os passos for o mesmo, o algoritmo acaba realizando o mesmo processo que a busca em largura.

- A primeira solução encontrada é a **solução ótima** se custo do caminho sempre aumentar ao logo do caminho, ou seja, não existirem operadores com custo negativo.

Algoritmo de Dijkstra

```
DIJKSTRA(G, w, s, e)
  for each u ∈ V[G]
    g[u] ← ∞;
    π[u] ← NULL;
  g[s] ← 0;
  Q ← CREATE-HEAP(g);      //heap ordenado por g[v]
  INSERT(Q, s);
  C ← CREATE-HASHTABLE(); //hash table de nós já visitados
  while Q ≠ ∅
    v ← POP-MIN(Q);
    if v = e
      return n;
    if (not CONTAINS(C, v))
      INSERT(C, v);
      for each u ∈ Adj[v]
        if g[u] > g[v] + w(v, u)
          g[u] ← g[v] + w(v, u);
          π[u] ← v
          INSERT(Q, u);
 return NULL;
```

Algoritmo de Dijkstra

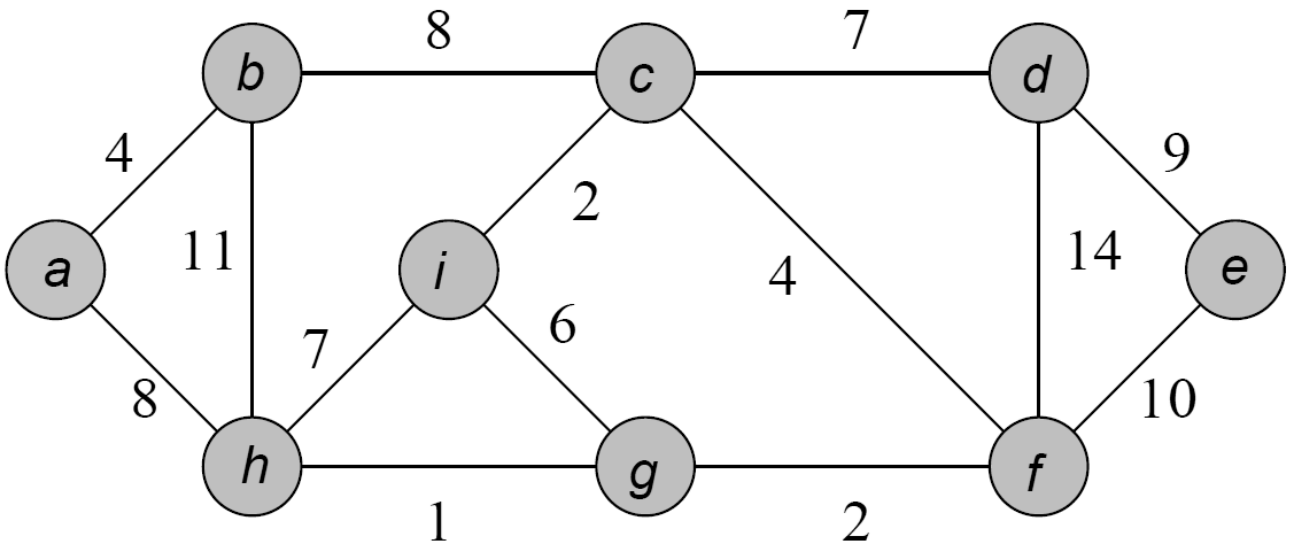



```
DIJKSTRA(G, w, s, e)
  for each u ∈ V[G]
    g[u] ← ∞;
    π[u] ← NULL;
  g[s] ← 0;
  Q ← CREATE-HEAP(g);
  INSERT(Q, s);
  C ← CREATE-HASHTABLE();
```

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
π									
g									

Q									
C									

Algoritmo de Dijkstra

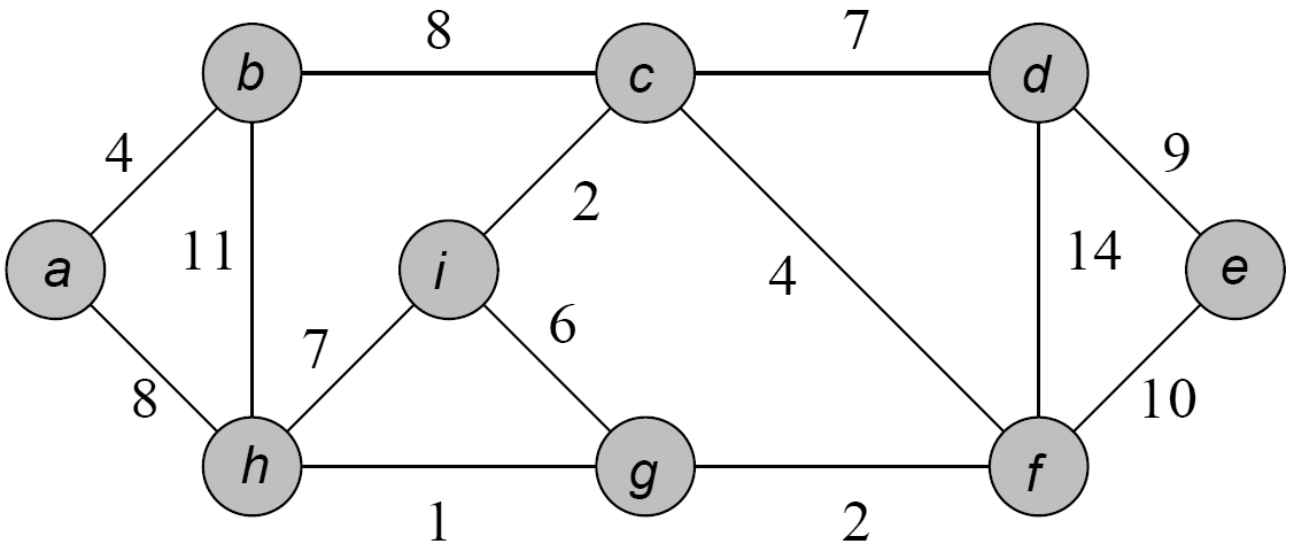



```
while Q ≠ ∅
    v ← POP-MIN(Q);
    if v = e
      return n;
    if (not CONTAINS(C, v))
      INSERT(C, v);
      for each u ∈ Adj[v]
        if g[u] > g[v] + w(v, u)
          g[u] ← g[v] + w(v, u);
          π[u] ← v
          INSERT(Q, u);
```

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
π									
g									

Q									
C									

Algoritmo de Dijkstra




```
while Q ≠ ∅
    v ← POP-MIN(Q);
    if v = e
      return π;
    if (not CONTAINS(C, v))
      INSERT(C, v);
      for each u ∈ Adj[v]
        if g[u] > g[v] + w(v, u)
          g[u] ← g[v] + w(v, u);
          π[u] ← v
          INSERT(Q, u);
```

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
π	/	a	b	c	f	g	h	a	c
g	0	4	12	19	21	11	9	8	14

Q									
C	a	b	h	g	f	c	i	d	e

Algoritmo de Dijkstra - Análise

```
DIJKSTRA(G, w, s, e)
  for each u ∈ V[G]
    g[u] ← ∞;
    π[u] ← NULL;
  g[s] ← 0;
  Q ← CREATE-HEAP(g);
  INSERT(Q, s);
  C ← CREATE-HASHTABLE();
  while Q ≠ ∅
    v ← POP-MIN(Q);
    if v = e
      return n;
    if (not CONTAINS(C, v))
      INSERT(C, v);
      for each u ∈ Adj[v]
        if g[u] > g[v] + w(v, u)
          g[u] ← g[v] + w(v, u);
          π[u] ← v
          INSERT(Q, u);
 return NULL;
```

- Inicializar g e π: O(V)
- Criar Q e C: O(1)
- Percorrer vértices em Q: O(V)
- POP-MIN: O(1)
- CONTAINS: O(1)
- Percorrer vértices adjacentes: O(A)
- Atualizar heap Q: O(log V)
- Complexidade:

  O((V + A) log V)

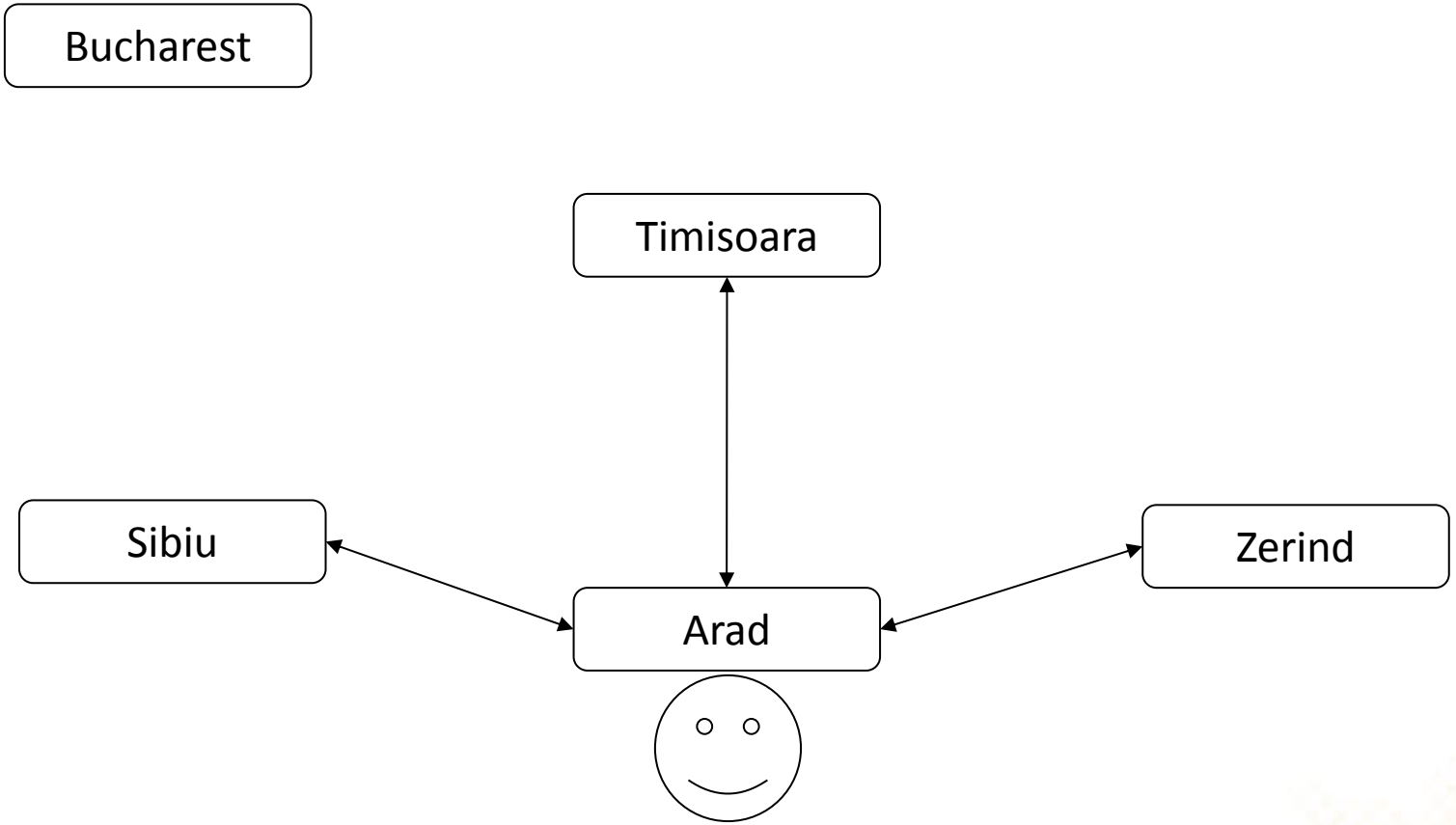
Resolução de Problemas por Busca

- **Objetivo:** Conjunto de estados que satisfazem o objetivo.

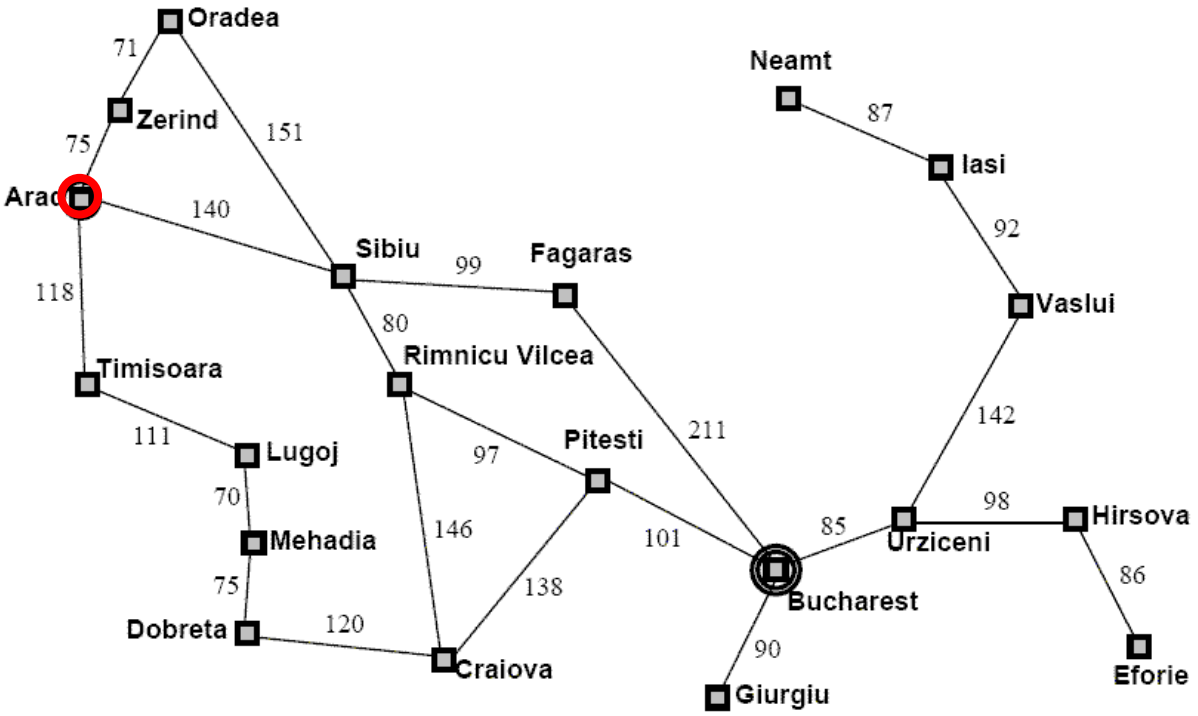
- **Tarefa de Busca:** Encontrar a sequencia de ações que leva do estado atual até um estado objetivo.

- Quais são os estados?
- Quais são as ações?
- Nível de abstração?

Problema de Busca



Problema de Busca



Definição de um Problema

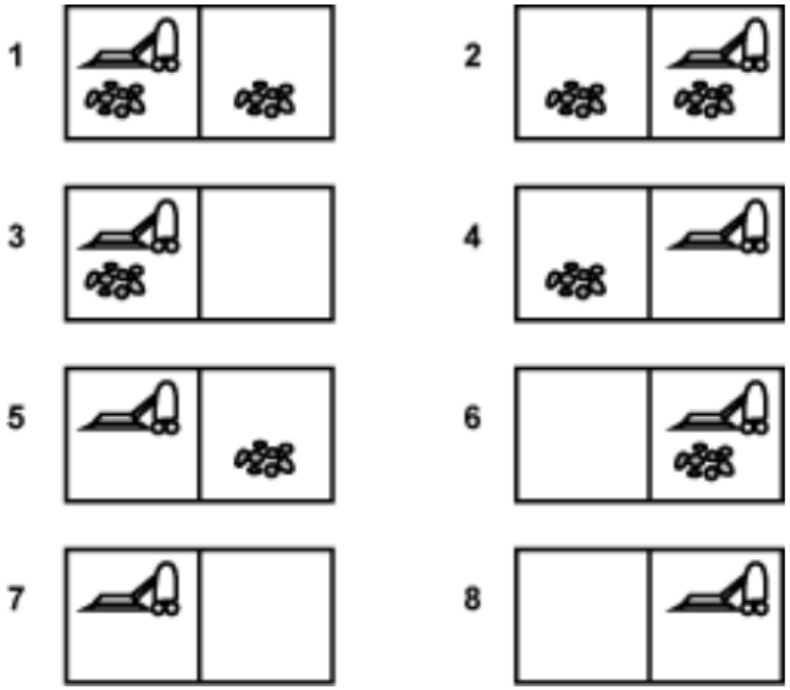
- **Estado Inicial:** Estado inicial do agente.
  - Ex: Em(Arad)
- **Estado Final:** Estado buscado pelo agente.
  - Ex: Em(Bucharest)
- **Ações Possíveis:** Conjunto de ações que o agente pode executar.
  - Ex: Ir(Cidade, PróximaCidade)
- **Espaço de Estados:** Conjunto de estados que podem ser atingidos a partir do estado inicial.
  - Ex: Mapa da Romênia.
- **Custo:** Custo numérico de cada caminho.
  - Ex: Distância em KM entre as cidades.

Considerações em Relação ao Ambiente

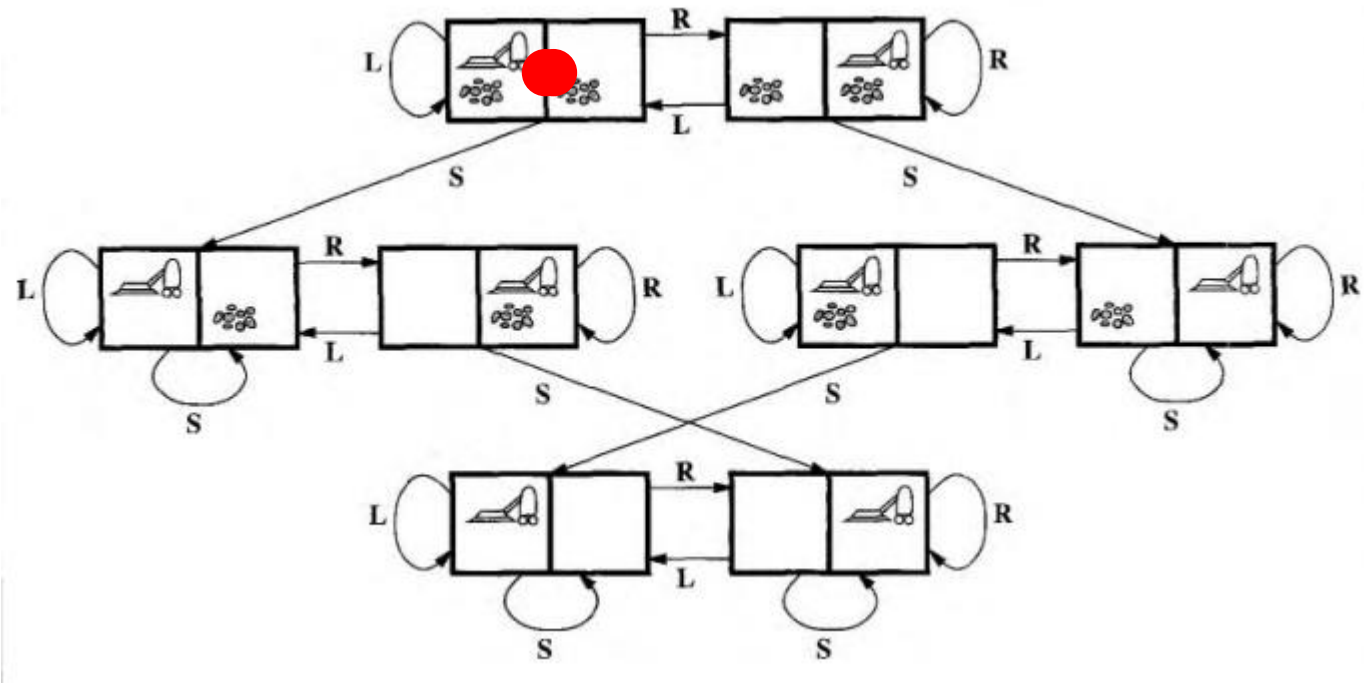
- **Estático:**
  - O Ambiente não pode mudar enquanto o agente está realizando a resolução do problema.
- **Observável:**
  - O estado inicial do ambiente precisa ser conhecido previamente.
- **Determinístico:**
  - O próximo estado do agente deve ser determinado pelo estado atual + ação. A execução da ação não pode falhar.

Exemplo: Aspirador de Pó

- **Espaço de Estados:** 8 estados possíveis (figura ao lado);
- **Estado Inicial:** Qualquer estado;
- **Estado Final:** Estado 7 ou 8 (ambos quadrados limpos);
- **Ações Possíveis:** Mover para direita, mover para esquerda e limpar;
- **Custo:** Cada passo tem o custo 1, assim o custo do caminho é definido pelo número de passos;

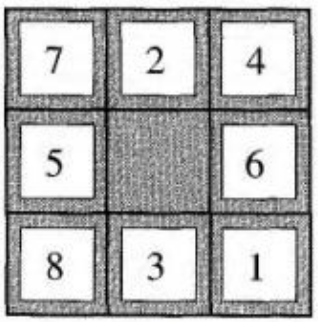


Exemplo: Aspirador de Pó

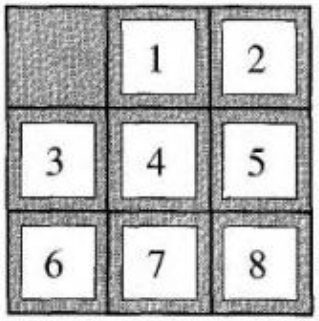


Exemplo: 8-Puzzle

- **Espaço de Estados:** 181.440 possíveis estados;
- **Estado Inicial:** Qualquer estado;
- **Estado Final:** Figura ao lado – Goal State;
- **Ações Possíveis:** Mover o quadrado vazio para direita, para esquerda, para cima ou para baixo;
- **Custo:** Cada passo tem o custo 1, assim o custo do caminho é definido pelo número de passos;



Start State



Goal State

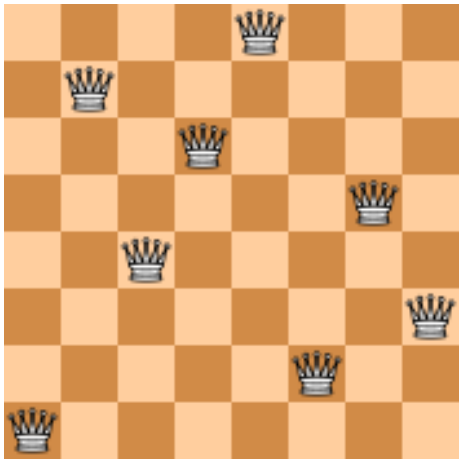
- **15-puzzle (4x4) –** 1.3 trilhões estados possíveis.
- **24-puzzle (5x5) –** 10^{25} estados possíveis.

Exemplo: Xadrez

- **Espaço de Estados:** Aproximadamente 10^{40} possíveis estados (Claude Shannon, 1950);
- **Estado Inicial:** Posição inicial de um jogo de xadrez;
- **Estado Final:** Qualquer estado onde o rei adversário está sendo atacado e o adversário não possui movimentos válidos;
- **Ações Possíveis:** Regras de movimentação de cada peça do xadrez;
- **Custo:** Quantidade de posições examinadas;

Exemplo: 8 Rainhas (Incremental)

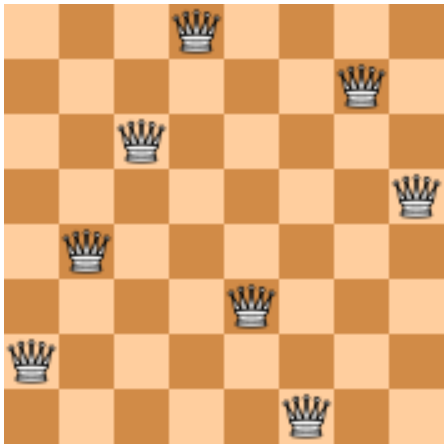
- **Espaço de Estados:** Qualquer disposição de 0 a 8 rainhas no tabuleiro (1.8×10^{14} possíveis estados);
- **Estado Inicial:** Nenhuma rainha no tabuleiro;
- **Estado Final:** Qualquer estado onde as 8 rainhas estão no tabuleiro e nenhuma esta sendo atacada;
- **Ações Possíveis:** Colocar uma rainha em um espaço vazio do tabuleiro;
- **Custo:** Não importa nesse caso;



* O jogo possui apenas 92 possíveis soluções (considerando diferentes rotações e reflexões). E apenas 12 soluções únicas.

Exemplo: 8 Rainhas (Estados Completos)

- **Espaço de Estados:** Tabuleiro com n rainhas, uma por coluna, nas n colunas mais a esquerda sem que nenhuma rainha ataque outra (2057 possíveis estados);
- **Estado Inicial:** Nenhuma rainha no tabuleiro;
- **Estado Final:** Qualquer estado onde as 8 rainhas estão no tabuleiro e nenhuma esta sendo atacada;
- **Ações Possíveis:** Adicionar uma rainha em qualquer casa na coluna vazia mais à esquerda de forma que não possa ser atacada;
- **Custo:** Não importa nesse caso;



Aplicações em Problemas Reais

- **Cálculo de Rotas:**
  - Planejamento de rotas de aviões;
  - Sistemas de planejamento de viagens;
  - Caixeiro viajante;
  - Rotas em redes de computadores;
  - Jogos de computadores (rotas dos personagens);

- **Alocação**
  - Salas de aula;
  - Máquinas industriais;

Aplicações em Problemas Reais

- **Circuitos Eletrônicos:**
  - Posicionamento de componentes;
  - Rotas de circuitos;

- **Robótica:**
  - Navegação e busca de rotas em ambientes reais;
  - Montagem de objetos por robôs;

Métodos de Busca

- **Busca Cega ou Exaustiva:**
  - Não sabe qual o melhor nó da fronteira a ser expandido. Apenas distingue o estado objetivo dos não objetivos.

- **Busca Heurística:**
  - **Estima qual o melhor nó da fronteira a ser expandido com base em funções heurísticas.**

- **Busca Local:**
  - Operam em um único estado e movem-se para a vizinhança deste estado.

Busca Heurística

- **Algoritmos de Busca Heurística:**
  - Busca Gulosa
  - A*

- A busca heurística leva em conta o **objetivo** para decidir qual caminho escolher.

- Conhecimento extra sobre o problema é utilizado para **guiar o processo de busca**.

Busca Heurística

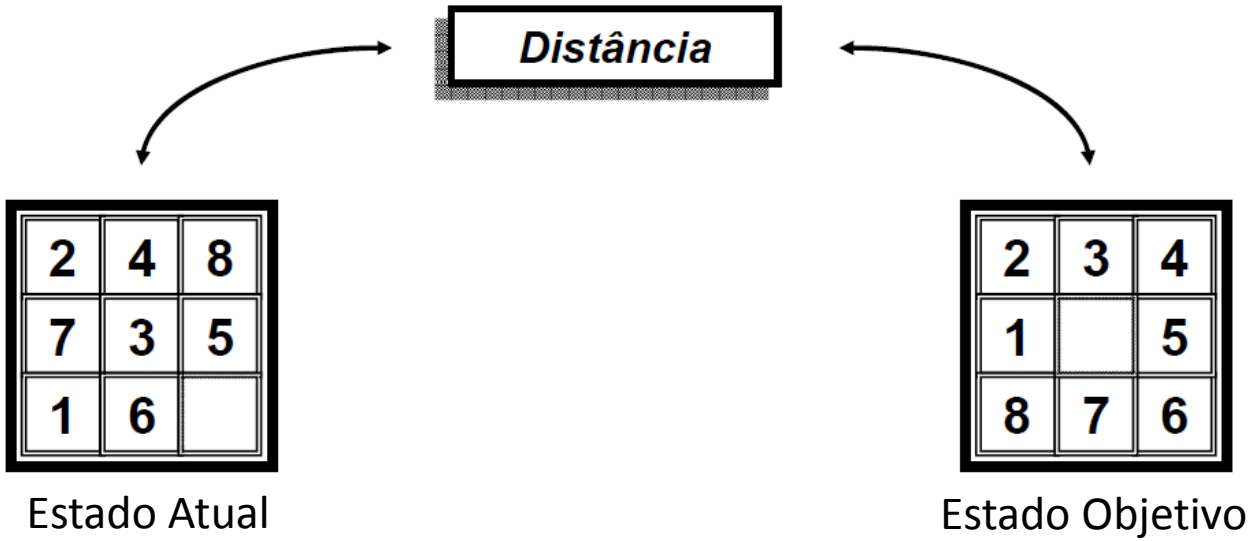
- Como encontrar um barco perdido?
  - **Busca Cega** -> Procura no oceano inteiro.
  - **Busca Heurística** -> Procura utilizando informações relativas ao problema.
    - Exemplo: correntes marítimas, vento, etc.

Busca Heurística

- **Função Heurística** (*h*)
  - Estima o custo do caminho mais barato do estado atual até o estado final mais próximo.
  - São específicas para cada problema.

- **Exemplo:**
  - Encontrar a rota mais curta entre duas cidades:
    - *h*(*n*) = distância em linha reta direta entre o nó *n* e o nó final.

Função Heurística



Estado Atual

Estado Objetivo

$$h_1\left(\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&4&8\\\hline 7&3&5\\\hline 1&6&\\\hline\end{array}\right) = ?$$

Busca Heurística

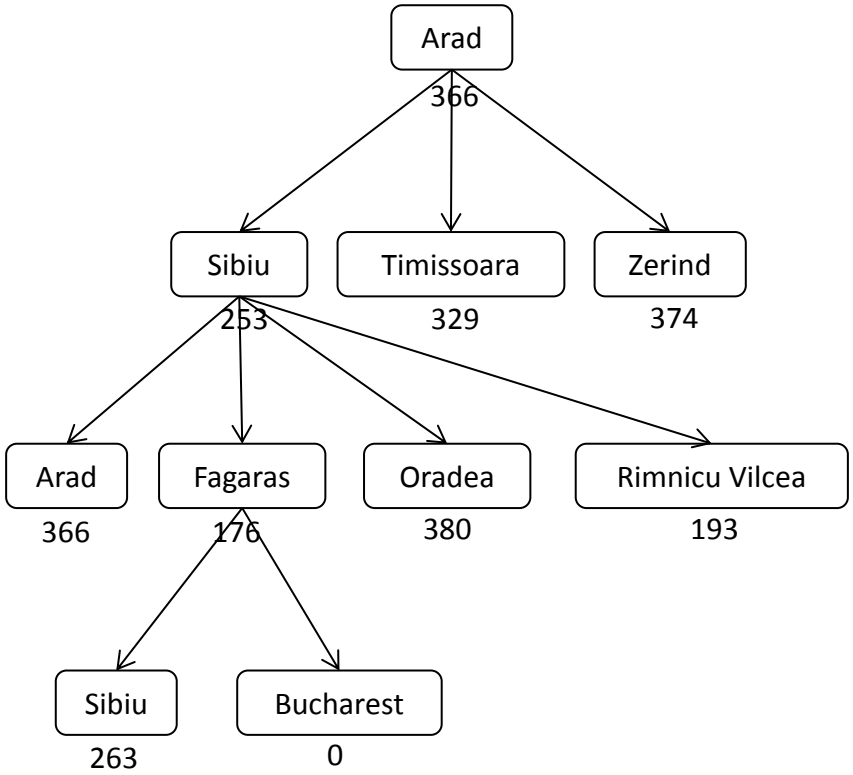
- **Algoritmos de Busca Heurística:**
  - Busca Gulosa
  - A*

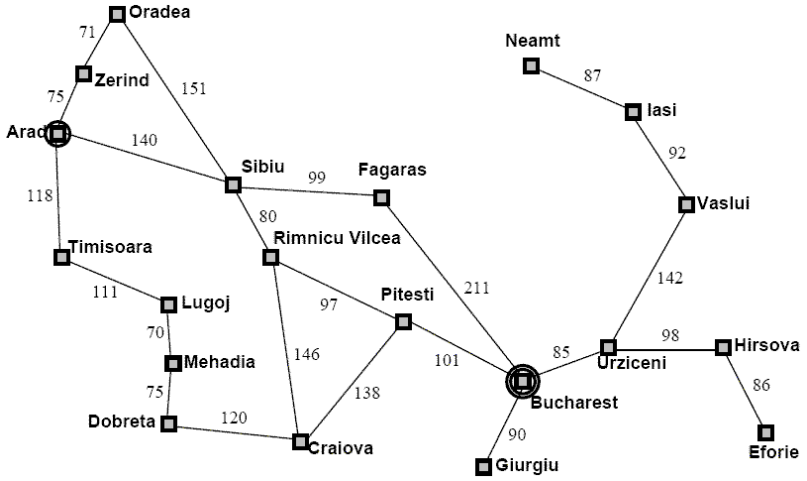
Busca Gulosa

- **Estratégia:**
  - Expande os nós que se encontram mais próximos do objetivo (uma linha reta conectando os dois pontos no caso de distancias), desta maneira é provável que a busca encontre uma solução rapidamente.

- A implementação do algoritmo se assemelha ao utilizado na busca cega, entretanto utiliza-se uma função heurística para decidir qual o nó deve ser expandido.

Busca Gulosa





Arad	366	Mehadia	241
Bucharest	0	Neamt	234
Craiova	160	Oradea	380
Drobeta	242	Pitesti	100
Eforie	161	Rimnicu Vilcea	193
Fagaras	176	Sibiu	253
Giurgiu	77	Timisoara	329
Iasi	226	Vaslui	199
Lugoj	244	Zerind	374
Hirsova	151	Urziceni	80

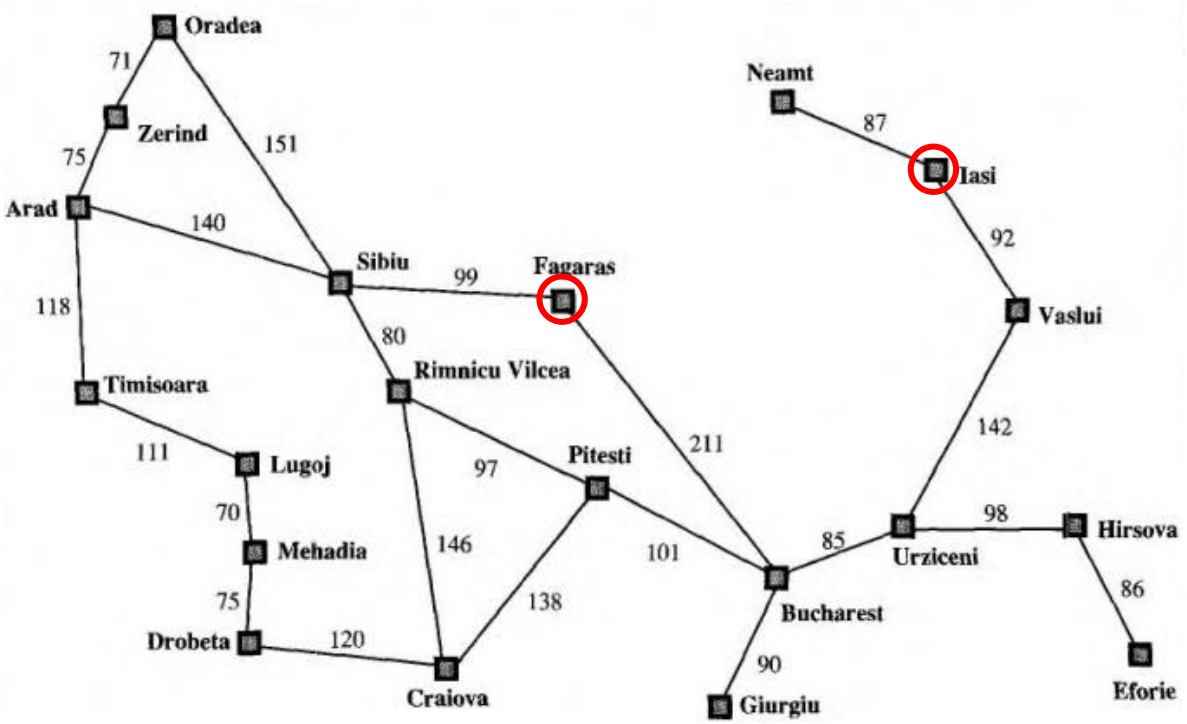
Função Heurística (h):
Distancia em linha reta

Busca Gulosa

- **Custo de busca mínimo:**
  - No exemplo, não expande nós fora do caminho.
- **Não é ótima:**
  - No exemplo, escolhe o caminho que é mais econômico à primeira vista, via Fagaras.
  - Porém, existe um caminho mais curto via Rimnicu Vilcea.
- **Não é completa:**
  - Pode entrar em loop se não detectar a expansão de estados repetidos.
  - Pode tentar desenvolver um caminho infinito.

Busca Gulosa

- Ir de **Iasi** para **Fagaras**?

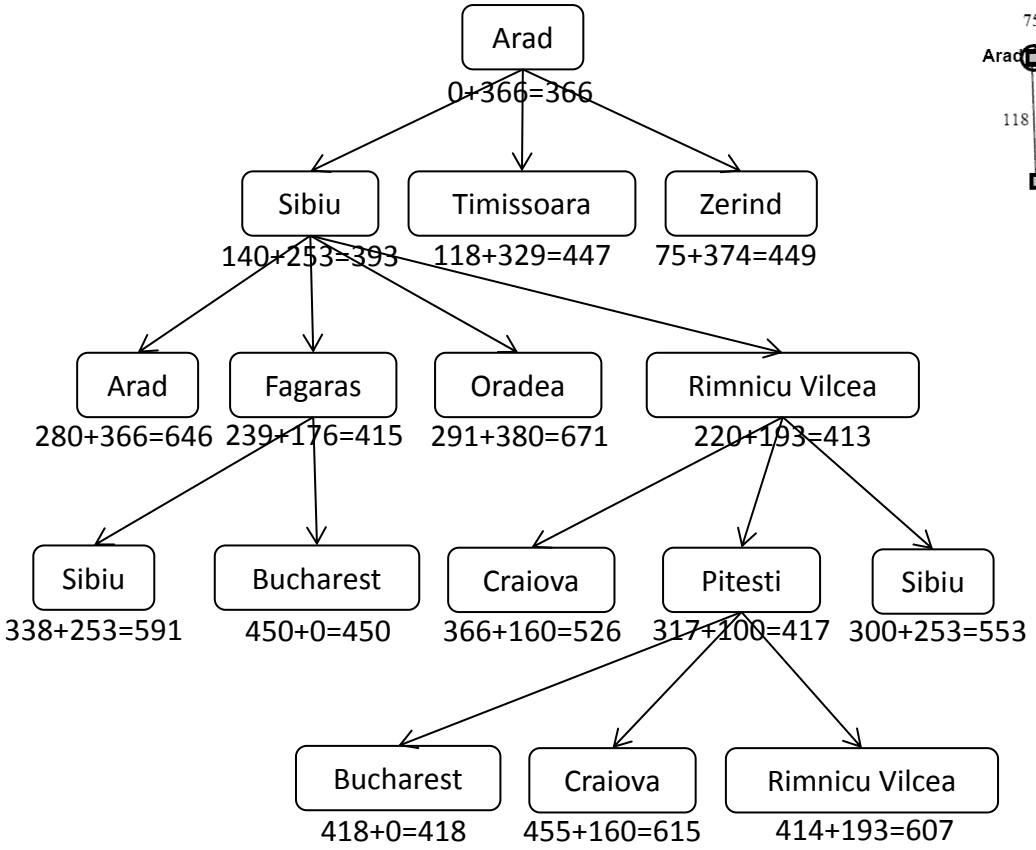


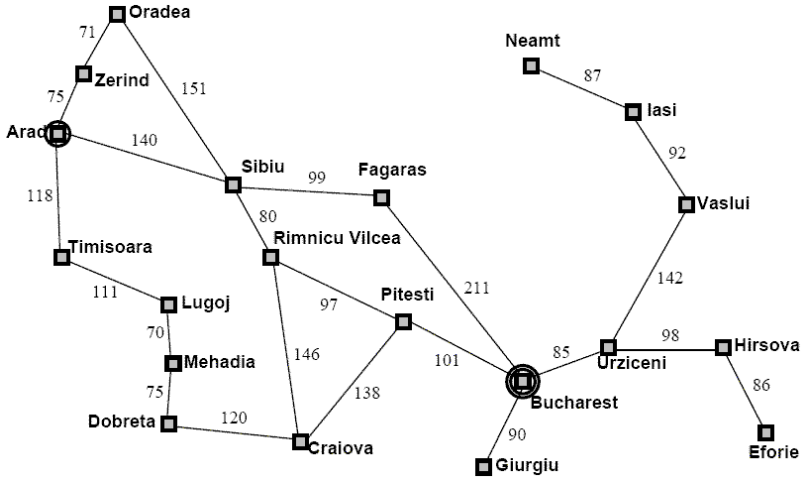
Busca A*

- **Estratégia:**
  - Combina o custo do caminho $g(n)$ com o valor da heurística $h(n)$
  - $g(n)$ = custo do caminho do nó inicial até o nó n
  - $h(n)$ = valor da heurística do nó n até um nó objetivo (distancia em linha reta no caso de distancias espaciais)
  - $f(n) = g(n) + h(n)$

- **É a técnica de busca mais utilizada.**

Busca A*





Arad	366	Mehadia	241
Bucharest	0	Neamt	234
Craiova	160	Oradea	380
Drobeta	242	Pitesti	100
Eforie	161	Rimnicu Vilcea	193
Fagaras	176	Sibiu	253
Giurgiu	77	Timisoara	329
Iasi	226	Vaslui	199
Lugoj	244	Zerind	374
Hirsova	151	Urziceni	80

Busca A*

- A estratégia é **completa** e **ótima**.
- **Custo de tempo:**
  - Exponencial com o comprimento da solução, porém boas funções heurísticas diminuem significativamente esse custo.
- **Custo memória:**
  - Guarda todos os nós expandidos na memória.
- Nenhum outro algoritmo ótimo garante expandir menos nós.