INF 1771 – Inteligência Artificial

Aula 22 – Incerteza

Edirlei Soares de Lima
<elima@inf.puc-rio.br>

Agentes Vistos Anteriormente

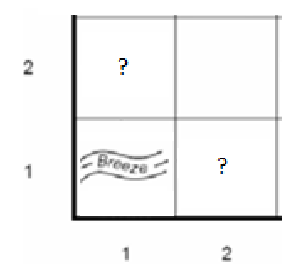
- **Agentes baseados em busca:**
  - Busca cega
  - Busca heurística
  - Busca local

- **Agentes baseados em lógica:**
  - Lógica proposicional
  - Lógica de primeira ordem

- **Agentes baseados em planejamento:**
  - Planejamento de ordem parcial
  - Planejamento em ambientes não-determinísticos

Incerteza

- Agentes raramente tem acesso à toda verdade sobre o ambiente.
- Mundo de Wumpus:
  - Apenas informações locais.
  - Maior parte do ambiente não é imediatamente observável.
  - Incerteza de fatos:



- O mundo real é muito mais complexo do que o mundo de wumpus. Informações não garantem resultados.

Incerteza

- **Exemplo:** Levar alguém ao aeroporto para pegar um vôo.
- Seja a ação A_t = sair para o aeroporto t minutos antes do vôo.
- A_t levará o passageiro ao aeroporto a tempo?
- Dificuldades de saber o resultado da ação:
  - Estados parcialmente observáveis.
    - Estados das estradas, trânsito, etc.
  - Sensores ruidosos.
    - Relatórios de trânsito
  - Incerteza quanto ao efeito das ações.
    - Acidentes, pneu furado, etc.
  - Grande complexidade em prever e modelar o trânsito.

Incerteza

- Um procedimento puramente lógico não é muito útil nesse caso:
  - Arriscaria deduzir algo potencialmente falso:
    - “A_{45} me levará a tempo ao aeroporto”
  - Levaria a conclusões fracas para tomada de decisões:
    - “A_{45} me levará a tempo ao aeroporto, se nenhum acidente ocorrer na ponte, se não chover, se nenhum pneu furar, etc.”
  - Levaria a conclusões que não práticas:
    - “A_{1440} me levará a tempo ao aeroporto”

Incerteza

- O plano escolhido deve maximizar a performance do agente.
  - Chegar no aeroporto a tempo.
  - Não perder tempo esperando no aeroporto.

- O agente não tem como garantir nenhum sucesso em seus objetivos.

- Mas ele pode prever um certo grau de crença que ele terá sucesso em seus objetivos.

Incerteza

- A coisa certa a se fazer depende da importância dos objetivos e da probabilidade de que eles serão alcançados.

- É necessário lidar com a **incerteza** e a **imprecisão** dos ambientes.

Incerteza

- Considerando a seguinte regra em **lógica de primeira ordem**:

  $\forall p$ Sintoma(p, Dor_de_Dente) $\Rightarrow$ Doença(p, Cáries)

- A regra esta **errada**. Nem todas as pessoas que tem dor de dente tem cáries, algumas podem ter outras doenças.

  $\forall p$ Sintoma(p, Dor_de_Dente) $\Rightarrow$ Doença(p, Cáries) $\vee$ Doença(p, Gengivite) $\vee$
  $\vee$ Doença(p, Abscesso)...

- Para tornar essa regra verdadeira seria necessário adicionar a ela uma **lista infinita** de possibilidades.

Incerteza

- Tentar utilizar lógica de primeira ordem para lidar com um domínio de diagnóstico médico falha por três razões:
  - **Preguiça:** É muito trabalho listar o conjunto completo de sentenças necessárias para garantir uma regra sem exceção.
  - **Ignorância teórica:** A medicina não tem nenhuma teoria completa para todos os domínios.
  - **Prático ignorância:** Mesmo conhecendo todas as regras, poderiam existir dúvidas sobre um determinado paciente.
- Este tipo de problema afeta também outros domínios: Negócios, Direito, Design, Reparação automóveis, Jardinagem...

Fontes de Incerteza

- Informações precisas podem ser muito complexas para serem modeladas.
- É necessário lidar com informações incompletas.
- Implicações podem ser modeladas de forma mais fraca:
  - Dor_de_Dente(0.7) ⇒ Doença(Cáries)

Quantificação do número de vezes em que a regra se aplica.

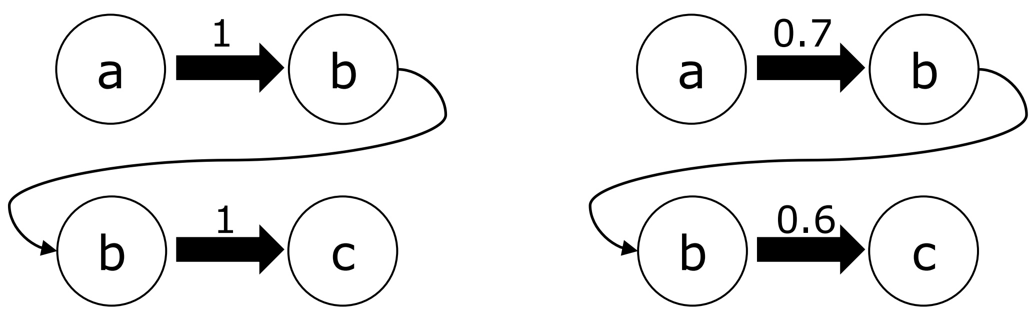
Fontes de Incerteza

- **Conflito de informações:**
  - Especialistas distintos podem fornecer informações conflitantes e incertas.
- **Propagação de incertezas:**
  - Fatos com um certo grau de incerteza implicam em outros fatos com um grau de incerteza ainda maior.

Exemplo:

$a \Rightarrow b$

$b \Rightarrow c$



Lidando com a Incerteza

- A principal ferramenta para se lidar com a incerteza é a **teoria da probabilidade**. Busca-se atribuir um grau de crença numérica (entre 0 e 1) a cada sentença.

- Modela-se o grau de crença de um agente dadas as evidências disponíveis:

  - “A_{25} chegará a tempo ao aeroporto com probabilidade 0.04”
  - “A_{45} chegará a tempo ao aeroporto com probabilidade 0.85”
  - “A_{60} chegará a tempo ao aeroporto com probabilidade 0.95”

Probabilidade

- A **probabilidade subjetiva ou bayesiana** estabelece o estado de crença do agente em uma sentença dadas as evidências.

  $P(A_{25}|\text{nenhum acidente}) = 0.06$

- A probabilidade de um sentença muda quando novas evidências chegam.

  $P(A_{25}|\text{nenhum acidente}) = 0.06$

  $P(A_{25}|\text{nenhum acidente, 5 a.m.}) = 0.15$

Decisões sob Incerteza

- Supondo o seguinte conjunto de crenças:

  $P(A_{25}|\ldots) = 0.04$
  $P(A_{90}|\ldots) = 0.70$
  $P(A_{120}|\ldots) = 0.95$
  $P(A_{1440}|\ldots) = 0.9999$

- Que ação o agente deve tomar?
  - Depende da preferência entre perder o vôo versus o tempo esperando no aeroporto.
    - **Teoria da utilidade** = representação de preferências
    - **Teoria da decisão** = teoria da probabilidade + teoria da utilidade

Introdução à Probabilidade

- Elemento básico da probabilidade é uma **variável aleatória**.
  - **Semelhante a lógica proposicional e de primeira ordem**, onde os mundos possíveis são definidos pela atribuição de valores às variáveis.

  - Cada variável aleatória tem um **domínio** que determina seus valores possíveis.
    - Tipos de domínio:
      - **Booleano**, exemplo: Cárie possui valores em <verdadeiro,falso>
      - **Discreto**, exemplo: Clima possui valores em <ensolarado, chuvoso, nublado, neve>
      - **Contínuo**, exemplo: Temperatura

Introdução à Probabilidade

- **Proposições elementares:**
  - São construídas através da atribuição de valores a variáveis.

  Exemplo: Cárie = falso, Clima = chuvoso

- **Proposições complexas:**
  - São formadas a partir de proposições elementares e conectivos lógicos padrão.

  Exemplo: Clima = chuvoso $\wedge$ Cárie = falso

Introdução à Probabilidade

- Um **evento atômico** consiste da especificação **completa** do estado do mundo sobre o qual o agente está incerto.
  - Uma atribuição de valores a TODAS as variáveis das quais o mundo é formado.
- **Exemplo:**
  - Cárie = verdadeiro ∧ DorDeDente = verdadeiro
  - Cárie = verdadeiro ∧ DorDeDente = falso
  - Cárie = falso ∧ DorDeDente = verdadeiro
  - Cárie = falso ∧ DorDeDente = falso

Probabilidade a priori

- O grau de crença em uma proposição na ausência de outras informações pode ser definida da seguinte maneira:

  P(Cárie = verdadeiro) = 0.1

  P(Clima = ensolarado) = 0.72

- Distribuição de probabilidades:

  P(Clima) = (0.7, 0.2, 0.08, 0.02)

Distribuição de probabilidade da variavel randomica
Clima = (ensolarado, chuvoso, nublado, neve)

Distribuição de Probabilidade Conjunta

- Probabilidades de todas as combinações de valores de um conjunto de variáveis aleatórias.

  P(Clima, Cárie) = tabela 4 x 2 de valores de probabilidade.

Clima	ensolarado	chuvoso	nublado	neve
Cárie = verdadeiro	0.144	0.02	0.016	0.02
Cárie = falso	0.576	0.08	0.064	0.08

- Uma distribuição conjunta total especifica a probabilidade de qualquer evento atômico.
  - Qualquer probabilidade nesse domínio pode ser calculada a partir da distribuição conjunta total.

Probabilidade Condicional ou "a posteriori"

- O grau de crença em uma proposição dada a presença de novas evidências pode ser definido utilizando a notação P(*a*|*b*):

  P(*Cárie* = verdadeiro | *Dor_De_Dente* = verdadeiro) = 0.6

  P(*Cárie* = verdadeiro | *Dor_De_Dente* = verdadeiro, Escova_Dentes_Regularmente = false) = 0.7

- P(*a*|*b*) = "A probabilidade de *a* dado todo o conhecimento *b*".

Probabilidade Condicional

- A probabilidade condicional pode ser definida em termos de probabilidades a priori:

$$P(a \mid b) = \frac{P(a \wedge b)}{P(b)} \quad \text{se} \quad P(b) > 0$$

- A mesma equação também pode ser escrita da seguinte maneira utilizando a **regra do produto**:

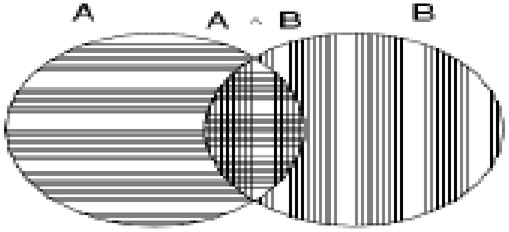
$$P(a \wedge b) = P(a \mid b)P(b)$$

- Ou:

$$P(a \wedge b) = P(b \mid a)P(a)$$

Axiomas da Probabilidade

- Para quaisquer proposições A, B:
  - $P(A) \geq 0$ e $P(A) \leq 1$
  - $P(Verdade) = 1$
  - $P(Falso) = 0$
  - $P(A \vee B) = P(A) + P(B) - P(A \wedge B)$



Probabilidade

- A probabilidade de uma proposição é igual à soma das probabilidades dos eventos atômicos em que ela é válida:

$$P(a) = \sum_{e_i \in e(a)} P(e_i)$$

- Essa equação permite calcular a probabilidade de qualquer proposição dada uma distribuição conjunta total que especifique todos os eventos atômicos.

Inferência Probabilística

- **Inferência probabilística** consiste na computação da distribuição de probabilidade posterior para um conjunto de variáveis de consulta C dada alguma evidência observada.

- A inferência é realizada com o uso de **distribuições conjuntas totais**. Ou seja, uma base de conhecimento a partir da qual são derivadas respostas para todas as consultas.

Inferência Probabilística

- Suponha um domínio com a seguinte distribuição conjunta total:

	Dor_De_Dente		¬Dor_De_Dente	
	Sonda	¬Sonda	Sonda	¬Sonda
Cárie	0.108	0.012	0.072	0.008
¬Cárie	0.016	0.064	0.144	0.576

- Para qualquer proposição *a*, P(*a*) é a soma dos eventos atômicos *w* onde *a* ocorre: $P(a) = \sum_{e_i \in e(a)} P(e_i)$

Inferência Probabilística

- Suponha um domínio com a seguinte distribuição conjunta total:

	Dor_De_Dente		¬Dor_De_Dente	
	Sonda	¬Sonda	Sonda	¬Sonda
Cárie	0.108	0.012	0.072	0.008
¬Cárie	0.016	0.064	0.144	0.576

- Para qualquer proposição *a*, P(*a*) é a soma dos eventos atômicos *w* onde *a* ocorre: $P(a) = \sum_{e_i \in e(a)} P(e_i)$

P(Dor_De_Dente) = 0.108 + 0.012 + 0.016 + 0.064 = 0.2

Inferência Probabilística

- Suponha um domínio com a seguinte distribuição conjunta total:

	Dor_De_Dente		¬Dor_De_Dente	
	Sonda	¬Sonda	Sonda	¬Sonda
Cárie	0.108	0.012	0.072	0.008
¬Cárie	0.016	0.064	0.144	0.576

- Para qualquer proposição *a*, P(*a*) é a soma dos eventos atômicos *w* onde *a* ocorre: $P(a) = \sum_{e_i \in e(a)} P(e_i)$

P(Dor_De_Dente ∨ Cárie) = 0.108 + 0.012 + 0.016 + 0.064 + 0.072 + 0.008 = 0.28

Inferência Probabilística

- É possível também calcular probabilidades condicionais: $P(a \mid b) = \frac{P(a \wedge b)}{P(b)}$

	Dor_De_Dente		¬Dor_De_Dente	
	Sonda	¬Sonda	Sonda	¬Sonda
Cárie	0.108	0.012	0.072	0.008
¬Cárie	0.016	0.064	0.144	0.576

$$P(\neg Cárie \mid Dor\_De\_Dente) = \frac{P(\neg Cárie \wedge Dor\_De\_Dente)}{P(Dor\_De\_Dente)}$$

$$P(\neg Cárie \mid Dor\_De\_Dente) = \frac{0.016 + 0.064}{0.108 + 0.012 + 0.016 + 0.064} = 0.4$$

Inferência Probabilística

- O denominador pode ser visto como uma constante de normalização α.

	Dor_De_Dente		¬Dor_De_Dente	
	Sonda	¬Sonda	Sonda	¬Sonda
Cárie	0.108	0.012	0.072	0.008
¬Cárie	0.016	0.064	0.144	0.576

$$P(Cárie \mid Dor\_De\_Dente) = \alpha P(Cárie,\ Dor\_De\_Dente)$$

$$= \alpha[P(Cárie,\ Dor\_De\_Dente, Sonda) + P(Cárie,\ Dor\_De\_Dente, \neg Sonda)]$$

$$= \alpha[< 0.108, 0.016 > + < 0.012, 0.064 >]$$

$$= \alpha[< 0.12, 0.08 >]$$

$$= < 0.6, 0.4 >$$

Problemas com a inferência por enumeração

- Complexidade de tempo (pior caso): **$O(d^n)$**
    - onde **d** é a cardinalidade do maior domínio e **n** é o número de variáveis.
- Complexidade de espaço: **$O(d^n)$** para armazenar a distribuição conjunta.
- Como encontrar as probabilidades para **$O(d^n)$** elementos?

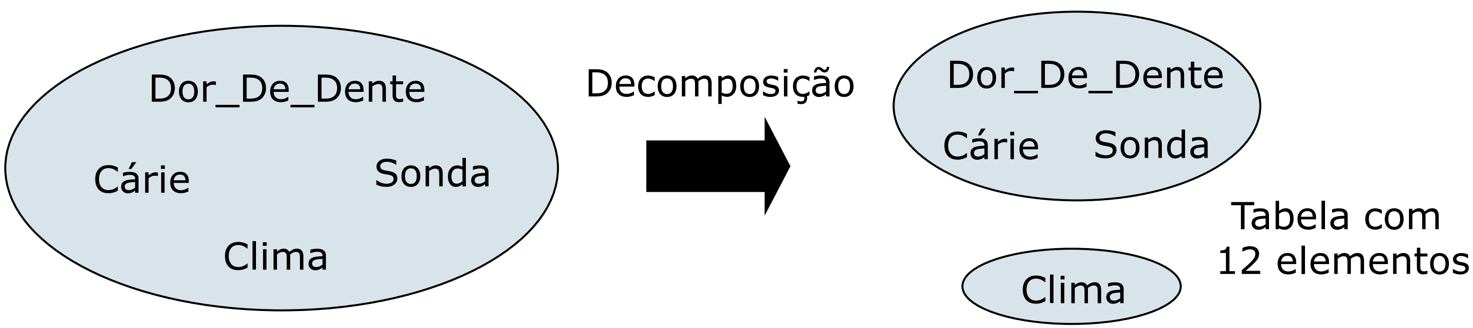
Independência

- X e Y são **independentes** se e somente se:

$$\mathbf{P}(X|Y) = \mathbf{P}(X) \quad \text{ou} \quad \mathbf{P}(Y|X) = \mathbf{P}(Y) \quad \text{ou} \quad \mathbf{P}(X,Y) = \mathbf{P}(X)\mathbf{P}(Y)$$

- **Exemplo:** P(Dor_De_Dente, Sonda, Cárie, Clima)
  - Tabela com 32 elementos.

$$\mathbf{P}(\text{Dor\_De\_Dente},\text{Cárie},\text{Sonda},\text{Clima}) = \mathbf{P}(\text{Dor\_De\_Dente},\text{Cárie},\text{Sonda})\mathbf{P}(\text{Clima})$$



Teorema de Bayes

- Seja:
  - P(A | B) a probabilidade de que a hipótese A seja verdadeira dada a evidência B.
  - P(B | A) a probabilidade que a evidência B será observada se a hipótese A for verdadeira.
  - P(A) a probabilidade “a priori” que a hipótese A é verdadeira na ausência de qualquer evidência específica.
  - k o número de hipóteses possíveis.

- O Teorema de Bayes é formulado como:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) * P(A)}{\sum_{n=0}^{k} P(B|A_n) * (P(A_n)}$$

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

Regra de Bayes – Exemplo

- Para aplicar a regra de Bayes é necessário três termos:
  - Uma probabilidade condicional.
  - Duas probabilidades incondicionais.

- Exemplo de diagnostico médico:
  - “um médico sabe que a meningite causa torcicolo em 50% dos casos. Porém, o médico também conhece algumas probabilidades incondicionais que dizem que, um caso de meningite atinge 1/50000 pessoas e, a probabilidade de alguém ter torcicolo é de 1/20”.

Regra de Bayes – Exemplo

- Considerando:
  - **T** = probabilidade incondicional de um paciente ter torcicolo:

    P(T) = 1/20

  - **M** = probabilidade incondicional de um paciente ter meningite.

    P(M) = 1/50000

  - **P(T|M) = 0.5** (probabilidade de ter torcicolo tendo meningite)

Regra de Bayes – Exemplo

- Aplicando a regra de Bayes:

$$P(M \mid T) = \frac{P(T \mid M)P(M)}{P(T)}$$

$$P(M \mid T) = \frac{0.5 \times 1/50000}{1/20}$$

$$P(M \mid T) = 0.0002$$

- É esperado que apenas 1 em 5000 pacientes com torcicolo tenha meningite.

Regra de Bayes – Exemplo

- Apesar de torcicolo ser um fortemente indicativo de meningite (com probabilidade 0.5), a probabilidade de meningite no paciente permanece pequena.