# INF 1771 – Inteligência Artificial

## Aula 06 – Lógica Proposicional

Edirlei Soares de Lima
<elima@inf.puc-rio.br>

# Lógica Proposicional

- Lógica simples.
- A sentenças são formadas por conectivos como: “e”, “ou”, “então”.
- É necessário definir:
  - **Sintaxe** (sentenças válidas).
  - **Semântica** (modo pelo qual a verdade das sentenças é determinada).
  - **Consequência lógica** (relação entre uma sentença e outra que decorre dela).
  - **Algoritmo para inferência lógica**.

# Sintaxe em Lógica Proposicional

- A sintaxe da lógica proposicional define as sentenças permitidas. É formada por:
  - **Símbolos:** nomes em letras maiúsculas (P, Q, R, ...) que podem assumir verdadeiro e falso;
  - **Sentenças atômicas**: constituídas por elementos sintáticos indivisíveis (símbolo proposicional);
  - **Sentenças complexas:** são construídas a partir de sentenças mais simples com a utilização de conectivos lógicos: $\neg$ (não), $\wedge$ (e), $\vee$ (ou), $\Rightarrow$ (implica), $\Leftrightarrow$ (dupla implicação)
    - Sentença cujo principal conectivo é $\wedge$: conjunção
    - Sentença cujo principal conectivo é $\vee$: disjunção

# Gramática da Lógica Proposicional

- **Sentença** → SentençaAtômica | SentençaComplexa
- **SentençaAtômica** → Verdadeiro | Falso | Símbolo
- **Símbolo** → P | Q | R | ...
- **SentençaComplexa** → ¬Sentença
  | (Sentença ∧ Sentença)
  | (Sentença ∨ Sentença)
  | (Sentença ⇒ Sentença)
  | (Sentença ⇔ Sentença)

# Exempos de Sentenças Validas

- $P$
- Verdadeiro
- $P \wedge Q$
- $(P \vee Q) \Rightarrow S$
- $(P \wedge Q) \vee R \Rightarrow S$
- $\neg(P \vee Q)$
- $\neg(P \vee Q) \Rightarrow R \wedge S$

# Implicação Lógica (⇒)

- $P \Rightarrow Q$
  - Se P é verdade então Q também é verdade.
  - Se esta chovendo então as ruas estão molhadas.

# Equivalencia Lógica (⇔)

- $P \Leftrightarrow Q$
  - Se P é verdade então Q também é verdade. Se Q é verdade então P também é verdade.
  - Se dois lados de um triangulo são iguais então os dois ângulos da base do tribulo são iguais.
  - A equivalência por ser substituída por duas sentenças de implicação: $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$

# Semântica da Lógica Proposicional

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r] & \text{A criança sabe escrever} \arrow[r, "F"] \arrow[dr, "V"'] & \text{Pré-Escola} \\ & & 2^\circ\ \text{Serie} \end{tikzcd}$$

# Semântica em Lógica Proposicional

- Descreve como calcular o valor verdade de qualquer sentença com base em um mesmo **modelo**. É necessário definir como calcular a verdade de sentenças atômicas e como calcular a verdade de sentenças formadas com cada um dos cinco conectivos ($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$).

- **Sentenças atômicas:**
  - Verdadeiro é verdadeiro e falso é falso em todo modelo.
  - O valor-verdade de todos os outros símbolos proposicionais deve ser especificado diretamente no modelo.

- **Sentenças complexas:**
  - As regras em cada conectivo são resumidas em uma **tabela-verdade**.

# Tabela-verdade para os Conectivos

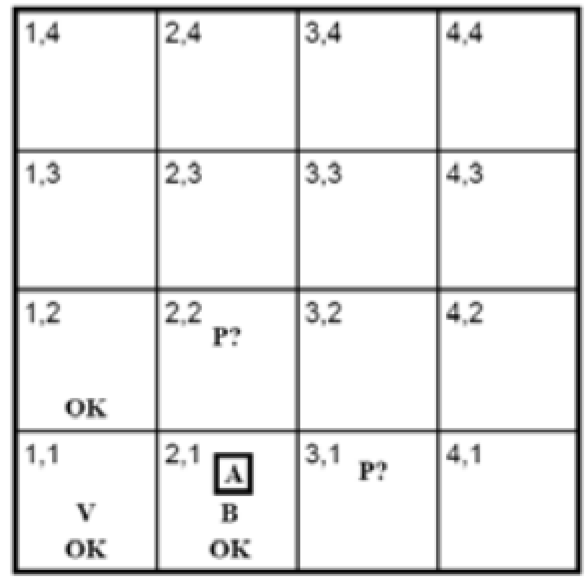
- Para os cinco conectivos lógicos apresentados, teremos:

| $P$ | $Q$ | $\neg P$ | $P \wedge Q$ | $P \vee Q$ | $P \Rightarrow Q$ | $P \Leftrightarrow Q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| F | F | V | F | F | V | V |
| F | V | V | F | V | V * | F |
| V | F | F | F | V | F | F |
| V | V | F | V | V | V | V |

- (*) Lógica proposicional não exige relação de causa e efeito entre P e Q. Deve-se entender esta relação como "se P é verdadeira, então Q é verdadeira. Caso contrário, não estou fazendo nenhuma afirmação". Exemplo:
  - "5 é ímpar implica que Tóquio é capital do Japão" (V)
  - "5 é par implica que João é inteligente" (V)

# Exemplo: Mundo de Wumpus

- Vocabulário de símbolos proposicionais:
  - Seja $P_{i,j}$ verdadeiro se existe poço em [i,j]
  - Seja $B_{i,j}$ verdadeiro se existe brisa em [i,j]



# Exemplo: Mundo de Wumpus

## Base de Conhecimento:

**R1**: $\neg P_{1,1}$ — Não há poço em [1,1].

**R2**: $B_{1,1} \Leftrightarrow (P_{1,2} \vee P_{2,1})$

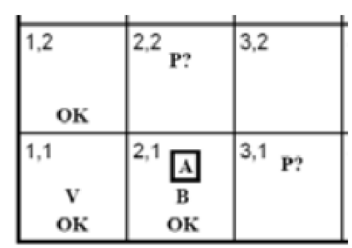
**R3**: $B_{2,1} \Leftrightarrow (P_{1,1} \vee P_{2,2} \vee P_{3,1})$

— Um quadrado tem uma brisa se e somente se existe um poço em um quadrado vizinho (todos os quadrados devem ser declarados).

**R4**: $\neg B_{1,1}$

**R5**: $B_{2,1}$

— Percepções adquiridas pelo agente do mundo em que ele se encontra.



# Inferência – Mundo de Wumpus

- **Inferência**: derivação de novas sentenças a partir de sentenças antigas.

- **Objetivo**: decidir se BC $\models \alpha$ para alguma sentença $\alpha$. Exemplos: $P_{1,2}$? $P_{2,2}$?

- **Algoritmo**: enumerar todos os modelos e verificar se $\alpha$ é verdadeira em todo modelo no qual BC é verdadeira.
  - Símbolos proposicionais relevantes:

  $B_{1,1}$, $B_{2,1}$, $P_{1,1}$, $P_{1,2}$, $P_{2,1}$, $P_{2,2}$, $P_{3,1}$

  - 7 símbolos $\rightarrow$ $2^7$=128 modelos possíveis

# Tabela Verdade – Mundo de Wumpus

| $B_{1,1}$ | $B_{2,1}$ | $P_{1,1}$ | $P_{1,2}$ | $P_{2,1}$ | $P_{2,2}$ | $P_{3,1}$ | R1 | R2 | R3 | R4 | R5 | BC |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| F | F | F | F | F | F | F | V | V | V | V | F | F |
| F | F | F | F | F | F | V | V | V | F | V | F | F |
| : | : | : | : | : | : | : | : | : | : | : | : | : |
| F | V | F | F | F | F | F | V | V | F | V | V | F |
| F | V | F | F | F | F | V | V | V | V | V | V | V |
| F | V | F | F | F | V | F | V | V | V | V | V | V |
| F | V | F | F | F | V | V | V | V | V | V | V | V |
| F | V | F | F | V | F | F | V | F | F | V | V | F |
| : | : | : | : | : | : | : | : | : | : | : | : | : |
| V | V | V | V | V | V | V | F | V | V | F | V | F |

- Em três desses modelos toda a base de conhecimento é verdadeira.
- Nesses três modelos, $\neg P_{1,2}$ é verdadeira. Dessa maneira conclui-se que **não existe poço em [1,2]**.
- $P_{2,2}$ é verdadeira em dois dos três modelos e falsa em um. Assim, **não podemos dizer ainda se existe um poço em [2,2]**.

# Equivalência

- Duas sentenças $\alpha$ e $\beta$ são logicamente equivalentes ($\alpha \Leftrightarrow \beta$) se são verdadeiras no mesmo conjunto de modelos.

$(\alpha \wedge \beta) \equiv (\beta \wedge \alpha)$ comutatividade de $\wedge$

$(\alpha \vee \beta) \equiv (\beta \vee \alpha)$ comutatividade de $\vee$

$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \equiv \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$ associatividade de $\wedge$

$(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \equiv \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$ associatividade de $\vee$

$\neg\neg\alpha \equiv \alpha$ eliminação de dupla negação

$(\alpha \Rightarrow \beta) \equiv (\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha)$ contraposição

$(\alpha \Rightarrow \beta) \equiv (\neg\alpha \vee \beta)$ eliminação de implicação

$(\alpha \Leftrightarrow \beta) \equiv ((\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha))$ eliminação de bicondicional

$\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv (\neg\alpha \vee \neg\beta)$ de Morgan

$\neg(\alpha \vee \beta) \equiv (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$ de Morgan

$(\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)) \equiv ((\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma))$ distributividade de $\wedge$ sobre $\vee$

$(\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)) \equiv ((\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma))$ distributividade de $\vee$ sobre $\wedge$

# Padrões de Raciocínio em Logica Proposicional

- **Modus Ponens**: A partir de uma implicação e a premissa da implicação, pode-se inferir a conclusão.

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta,\ \alpha}{\beta}$$

- **Eliminação de E**: De uma conjunção, pode-se inferir qualquer um dos conjuntores.

$$\frac{\alpha \wedge \beta}{\alpha}$$

- **Resolução Unitária**: De uma disjunção, se um dos disjuntores é falso, então pode-se inferir que o outro é verdadeiro.

$$\frac{\alpha \vee \beta,\ \neg \beta}{\alpha}$$

# De Volta ao Mundo de Wumpus

## Base de Conhecimento:

**R1**: $\neg P_{1,1}$ → Não há poço em [1,1].

**R2**: $B_{1,1} \Leftrightarrow (P_{1,2} \vee P_{2,1})$

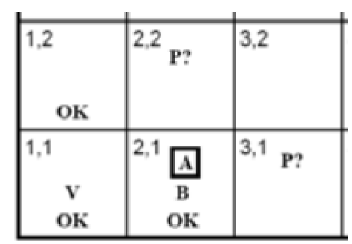
**R3**: $B_{2,1} \Leftrightarrow (P_{1,1} \vee P_{2,2} \vee P_{3,1})$

→ Um quadrado tem uma brisa se e somente se existe um poço em um quadrado vizinho (todos os quadrados devem ser declarados).

**R4**: $\neg B_{1,1}$

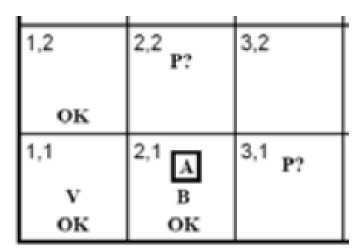
**R5**: $B_{2,1}$

→ Percepções adquiridas pelo agente do mundo ele se encontra.



# Provando $\neg P_{1,2}$ em Wumpus

- Eliminação bicondicional em **R2**:
  **R2**: $B_{1,1} \Leftrightarrow (P_{1,2} \lor P_{2,1})$
  **R6**: $(B_{1,1} \Rightarrow (P_{1,2} \lor P_{2,1})) \land ((P_{1,2} \lor P_{2,1}) \Rightarrow B_{1,1})$
- Eliminação de “e” em **R6**:
  **R7**: $(P_{1,2} \lor P_{2,1}) \Rightarrow B_{1,1}$ → De uma conjunção, pode-se inferir qualquer um dos conjuntores.
- Contraposição em R7:
  **R8**: $\neg B_{1,1} \Rightarrow \neg(P_{1,2} \lor P_{2,1})$
- Modus Ponens (**R4** + **R8**)
  **R4**: $\neg B_{1,1}$
  **R9**: $\neg(P_{1,2} \lor P_{2,1})$ → A partir de uma implicação e a premissa da implicação, pode-se inferir a conclusão.
- Regra de Morgan em **R9**:
  **R10**: $\neg P_{1,2} \land \neg P_{2,1}$
- Eliminação de “e” em **R10**: $\neg P_{1,2}$



# Prova Lógica

- A aplicação de uma sequencia de regras de inferências para derivar uma conclusão é chamado de **prova lógica**.

- A aplicação de inferências logicas é uma **alternativa a enumeração de modelos** vista anteriormente.

- Como saber quais regras de inferência devem ser utilizadas?

# Limitações da Lógica Proposicional

- A lógica proposicional é **simples de mais** para representar alguns problemas do mundo real.

- Em problemas complexos pode ser necessário a utilização de um **número muito grande de sentenças** para a criação de um agente realmente inteligente.