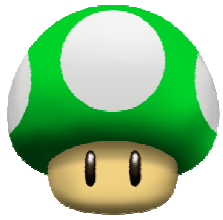


INF 1771 – Inteligência Artificial

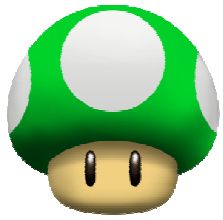
Aula 09 – Lógica Fuzzy

Edirlei Soares de Lima
<elima@inf.puc-rio.br>



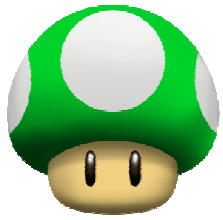
Introdução

- ❗ A **Lógica Fuzzy** é baseada na teoria dos conjuntos fuzzy.
- ❗ Tradicionalmente, uma proposição lógica tem dois extremos: ou é completamente verdadeiro ou é completamente falso.
- ❗ Entretanto, na lógica Fuzzy, uma premissa varia em **grau de verdade** de 0 a 1, o que leva a ser parcialmente verdadeira ou parcialmente falsa.



Introdução

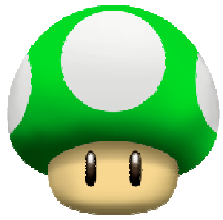
- ❏ Considerando a seguinte sentença: **Mário é alto.**
- ❏ A proposição é verdadeira para uma altura de Mario 1.65m?
- ❏ O termo linguístico “**alto**” é vago, como interpretá-lo?
- ❏ A teoria de conjuntos Fuzzy (semântica para lógica fuzzy) permite especificar quão bem um objeto satisfaz uma descrição vaga (predicado vago)



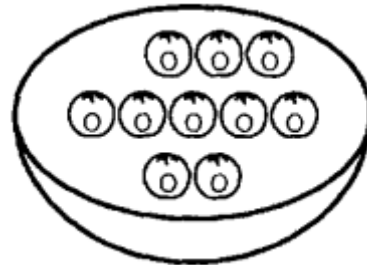
Introdução

- ❗ **Lógica convencional:** sim/não, verdadeiro/falso

- ❗ **Lógica Fuzzy** (difusa ou nebulosa):
 - ❗ Refletem o que as pessoas pensam
 - ❗ Tenta modelar o nosso senso de palavras, tomada de decisão ou senso comum
 - ❗ Trabalha com uma grande variedade de informações vagas e incertas, as quais podem ser traduzidas por expressões do tipo: a maioria, mais ou menos, talvez, etc.



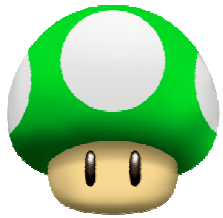
Introdução



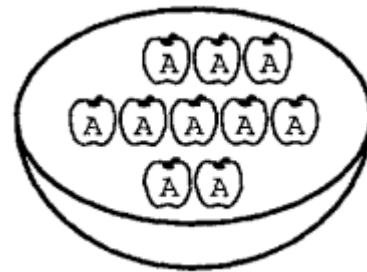
Isso é uma bacia de laranjas?

Sim

Fuzzy: Sim, com certeza!



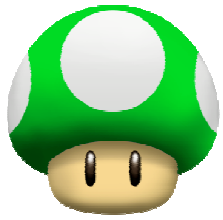
Introdução



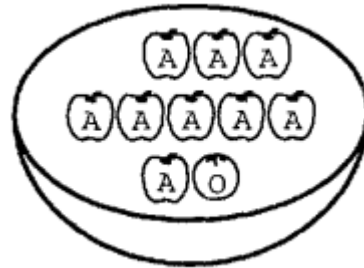
Isso é uma bacia de laranjas?

Não

Fuzzy: Não, com certeza!



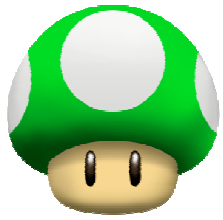
Introdução



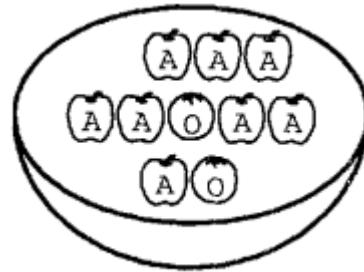
Isso é uma bacia de laranjas?

Não? Sim?

Fuzzy: Não



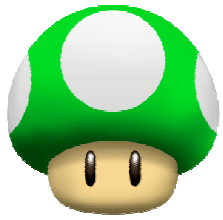
Introdução



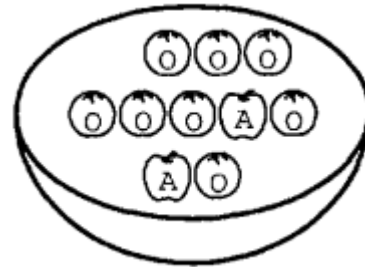
Isso é uma bacia de laranjas?

Não? Sim?

Fuzzy: Um pouco



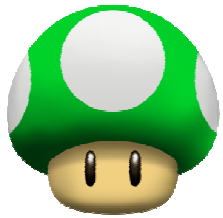
Introdução



Isso é uma bacia de laranjas?

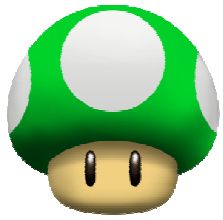
Não? Sim?

Fuzzy: A maior parte



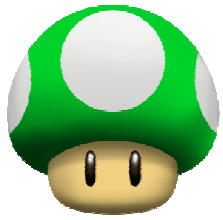
Introdução

- ❏ Sistemas baseados em lógica fuzzy podem ser usado para gerar estimativas, tomadas de decisão, sistemas de controle mecânico...
- ❏ Ar condicionado.
- ❏ Controles de automóveis.
- ❏ Casas inteligentes.
- ❏ Controladores de processo industrial.
- ❏ etc...



Introdução

- ❏ O **Japão** é um dos maiores utilizadores e difusores da lógica fuzzy.
 - ❏ O **metrô** da cidade de Sendai utiliza desde 1987 um sistema de controle fuzzy.
 - ❏ **Aspiradores de pó e máquinas de lavar** da empresa Matsushita - carrega e ajusta automaticamente à quantidade de detergente necessário, a temperatura da água e o tipo de lavagem.
 - ❏ **TVs da Sony** utilizam lógica fuzzy para ajustar automaticamente o contraste, brilho, nitidez e cores.
 - ❏ A **Nissan** utiliza lógica fuzzy em seus **carros** no sistema de transmissão automática e freios antitravamento.

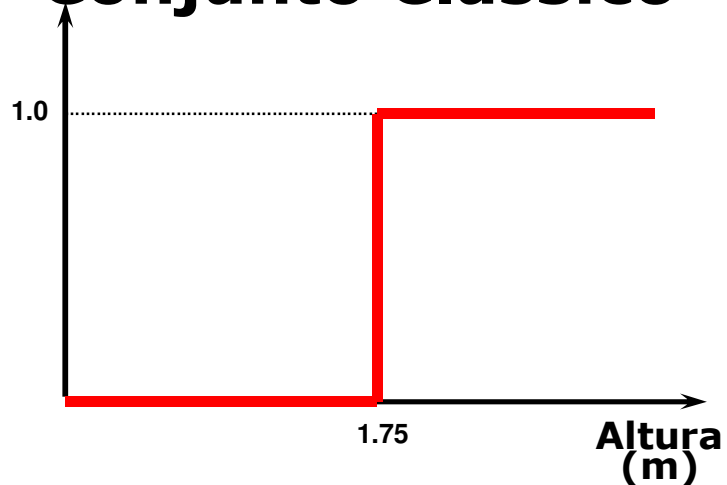


Conjuntos Fuzzy

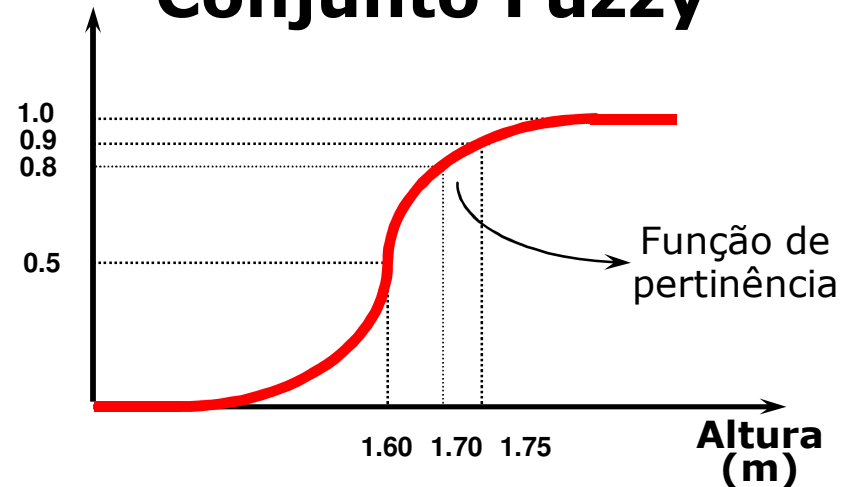
💡 Conjuntos com limites imprecisos

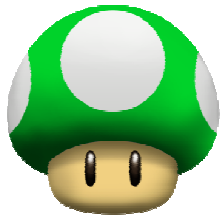
A = Conjunto de pessoas altas

Conjunto Clássico



Conjunto Fuzzy



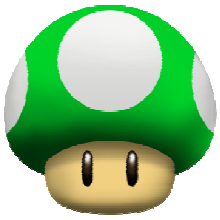


Conjuntos Fuzzy

- Um conjunto fuzzy A definido no universo X é caracterizado por uma **função de pertinência** u_A , a qual mapeia os elementos de X para o intervalo $[0,1]$.

$$u_{A:X} \rightarrow [0,1]$$

- Desta forma, a função de pertinência associa a cada elemento y pertencente a X um número real no intervalo $[0,1]$, que representa o **grau de pertinência** do elemento y ao conjunto A , isto é, o quanto é possível para o elemento y pertencer ao conjunto A .
- Uma sentença pode ser parcialmente verdadeira e parcialmente falsa.



Conjuntos Fuzzy

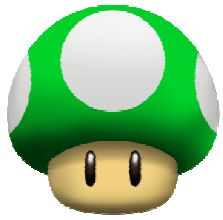
- **Definição formal:** Um conjunto fuzzy A em X é expresso como um conjunto de pares ordenados:

$$A = \{ (x, u_A(x)) \mid x \in X \}$$

↓ ↓ ↓

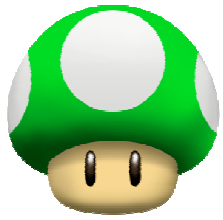
Conjunto Fuzzy Função de Pertinência Universo

Um conjunto fuzzy é totalmente caracterizado por sua função de pertinência.

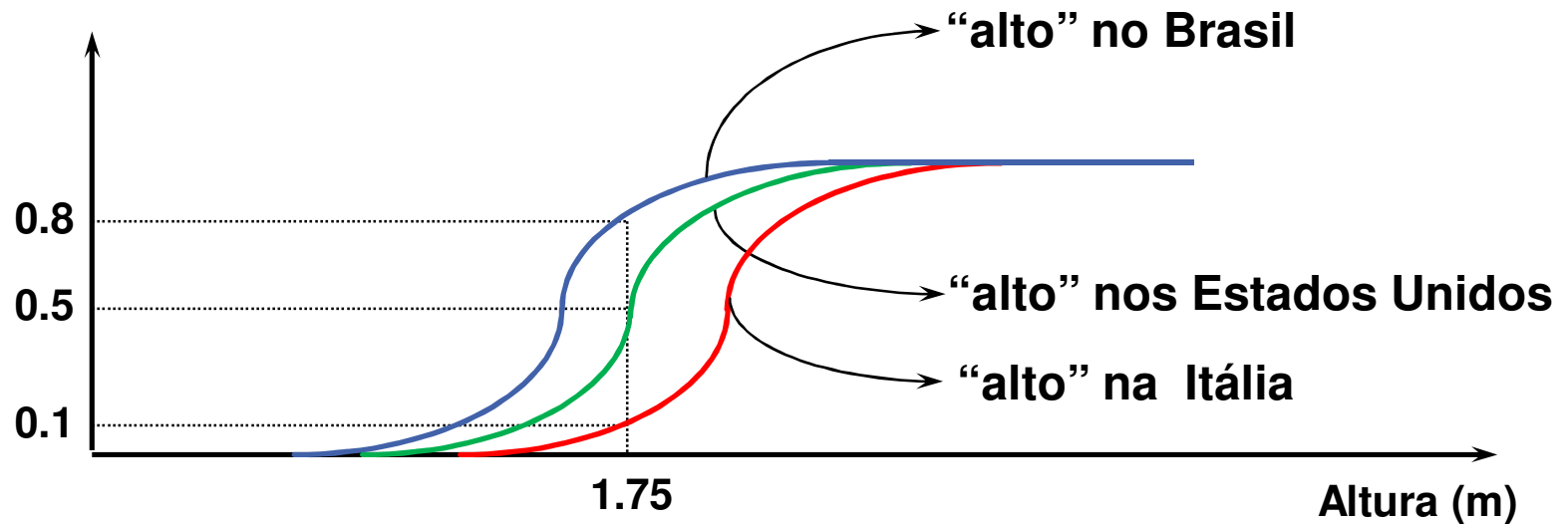


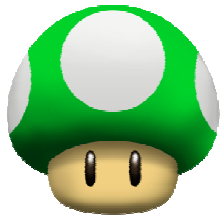
Função de Pertinência

- ❏ **Reflete o conhecimento** que se tem em relação a intensidade com que o objeto **pertence ao conjunto fuzzy.**
- ❏ Várias formas diferentes.
- ❏ Características das funções de pertinência:
 - ❏ Medidas subjetivas.
 - ❏ Funções não probabilísticas monotonicamente crescentes, decrescentes ou subdividida em parte crescente e parte decrescente.



Função de Pertinência





Função de Pertinência

❏ Função Triangular:

$$\text{trimf}(x; a, b, c) = \max\left(\min\left(\frac{x-a}{b-a}, \frac{c-x}{c-b}\right), 0\right)$$

❏ Função Trapezoidal:

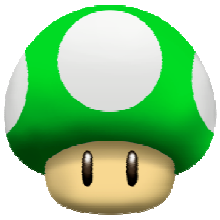
$$\text{trapmf}(x; a, b, c, d) = \max\left(\min\left(\frac{x-a}{b-a}, 1, \frac{d-x}{d-c}\right), 0\right)$$

❏ Função Gaussiana:

$$\text{gaussmf}(x; a, b, c) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-c}{\sigma}\right)^2}$$

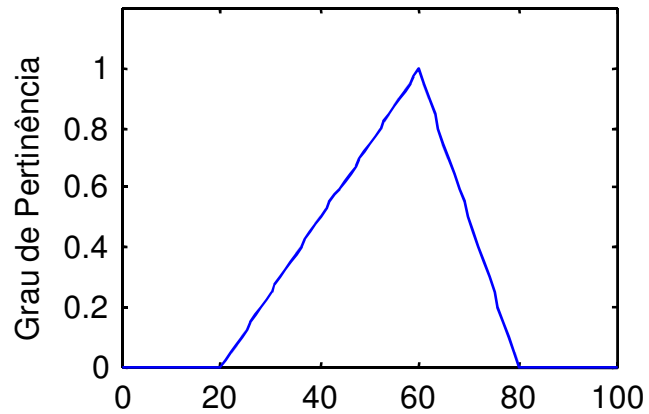
❏ Função Sino Generalizada:

$$\text{gbellmf}(x; a, b, c) = \frac{1}{1 + \left|\frac{x-c}{b}\right|^{2b}}$$

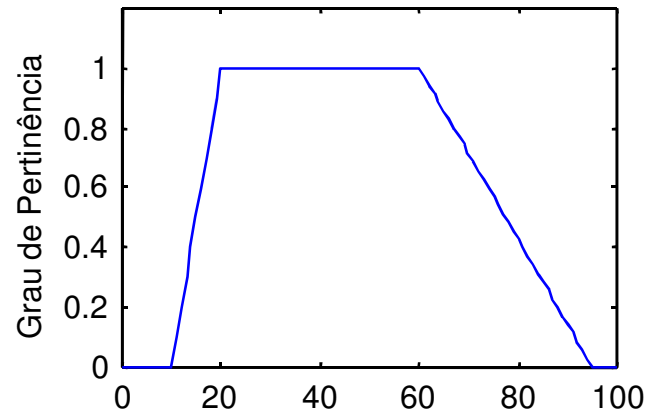


Função de Pertinência

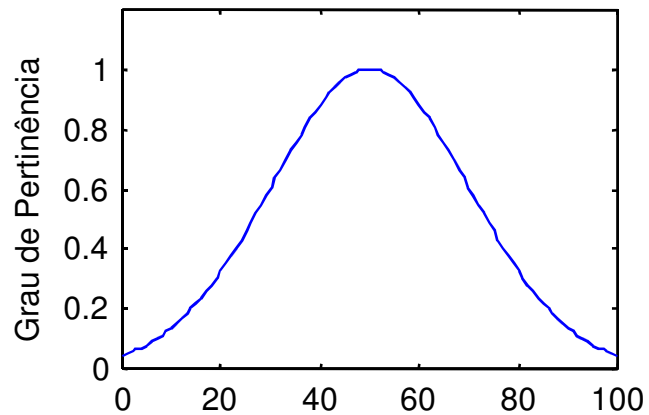
(a) Triangular



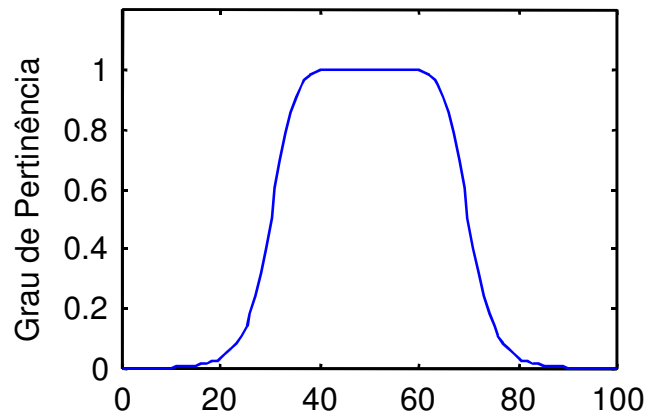
(b) Trapezoidal

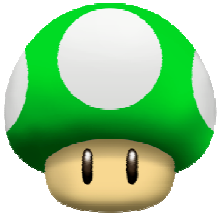


(c) Gaussiana



(d) Sino Generalizada



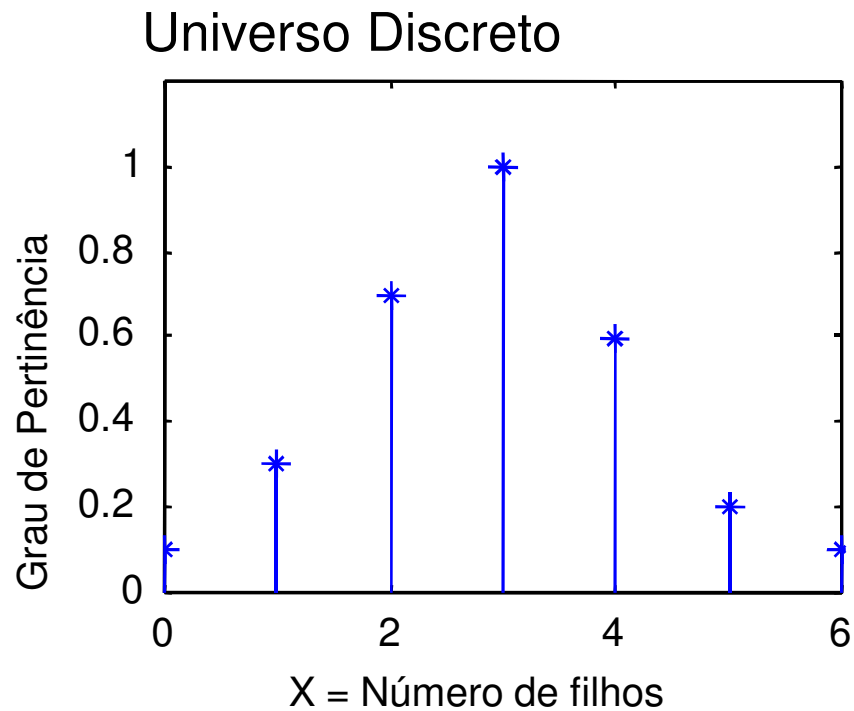


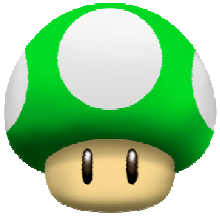
Função de Pertinência: Universo Discreto

$$X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

A = "Número de filhos"

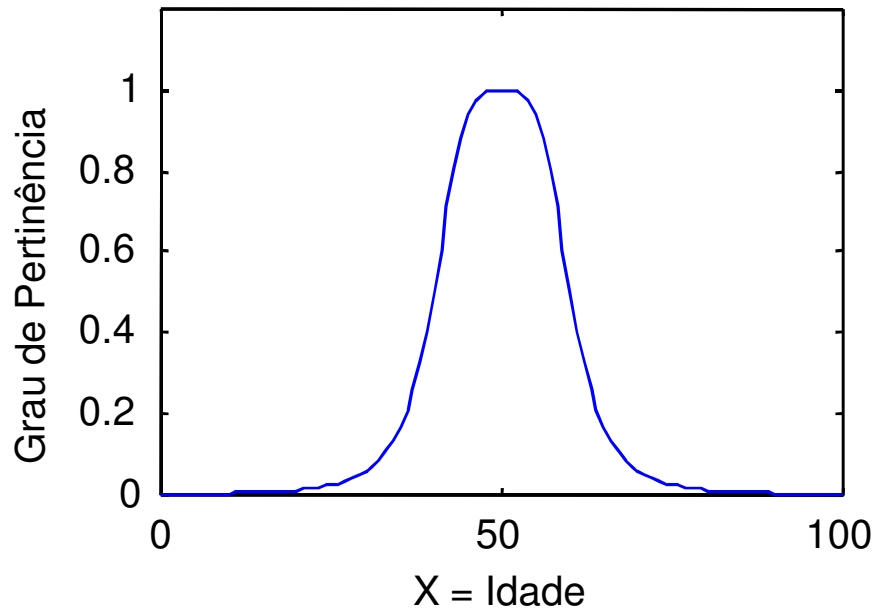
$$A = \{(0, 0.1), (1, 0.3), (2, 0.7), (3, 1), (4, 0.6), (5, 0.2), (6, 0.1)\}$$





Função de Pertinência: Universo Contínuo

(b) Universo Contínuo

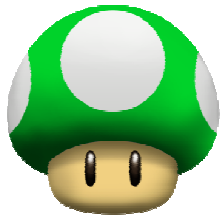


$X =$ (Conjunto de números reais positivos)

$B =$ "Pessoas com idade em torno de 50 anos"

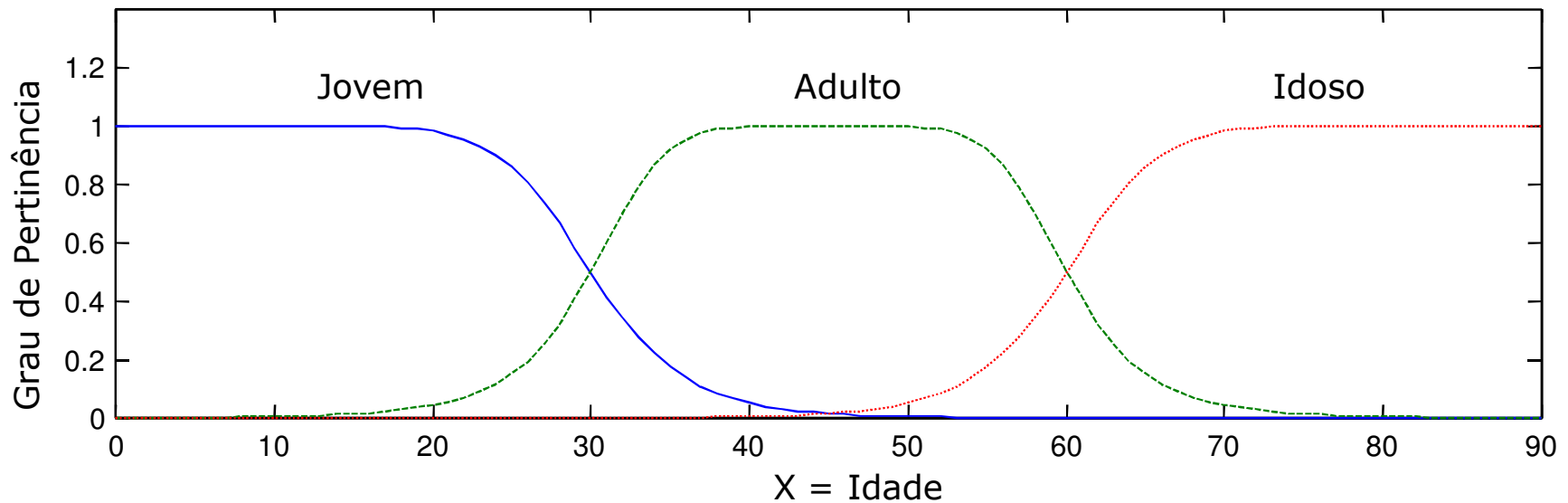
$B = \{(x, \mu_{B(x)}) \mid x \text{ em } X\}$

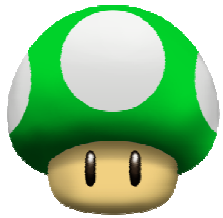
$$\mu_B(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x - 50}{10}\right)^2}$$



Partição Fuzzy

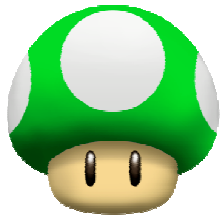
- Partição fuzzy do universo de X representando "idade", formada pelos conjuntos fuzzy "jovem", "adulto" e "idoso".



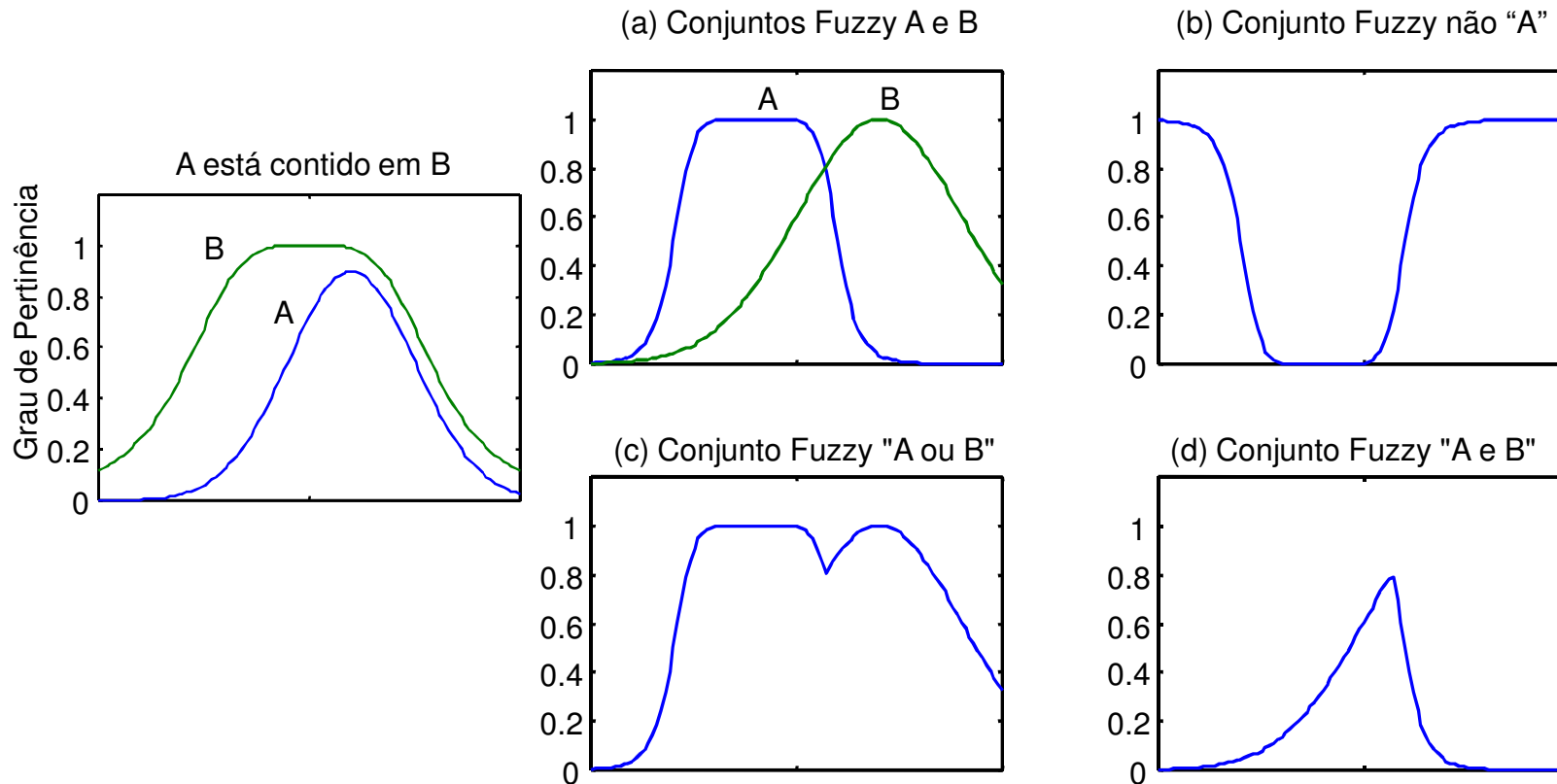


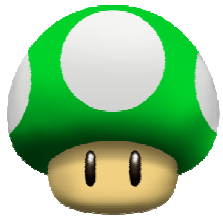
Variáveis Linguísticas

- ❏ Uma variável linguística possui valores que não são números, mas sim palavras ou frases na linguagem natural.
 - ❏ Idade = idoso
- ❏ Um valor linguístico é um conjunto fuzzy.
- ❏ Todos os valores linguísticos formam um conjunto de termos:
 - ❏ $T(\text{idade}) = \{\text{Jovem, velho, muito jovem, ...}$
 $\text{Adulto, não adulto, ...}$
 $\text{Velho, não velho, muito velho, mais ou menos velho...}\}$
- ❏ Permitem que a linguagem da modelagem fuzzy expresse a semântica usada por especialistas. Exemplo:
Se duração_do_projeto == não muito longo **então**
risco = ligeiramente reduzido



Operações Básicas





Exemplo: União e Interseção

- ❏ $X = \{a, b, c, d, e\}$

- ❏ $A = \{1/a, 0.7/b, 0.3/c, 0/d, 0.9/e\}$

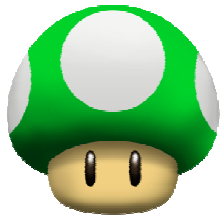
- ❏ $B = \{0.2/a, 0.9/b, 0.4/c, 1/d, 0.4/e\}$

- ❏ União

- ❏ $C = \{1/a, 0.9/b, 0.4/c, 1/d, 0.9/e\}$

- ❏ Interseção

- ❏ $D = \{0.2/a, 0.7/b, 0.3/c, 0/d, 0.4/e\}$



Regras Fuzzy

Regras Fuzzy consistem em:

- Um conjunto de condições IF (usando conectivos *and*, *or* ou *not*)
- Uma conclusão THEN
- Uma conclusão opcional ELSE

Exemplo:

Se velocidade > 100 Então

DPP é 30 metros

Se velocidade < 40 Então

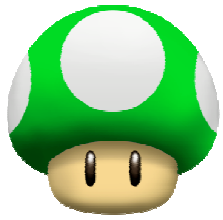
DPP é 10 metros

Se velocidade é alta Então

DPP é longa

Se velocidade é baixa

Então DPP é curta



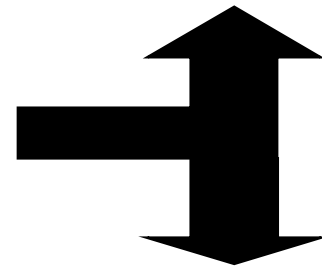
Etapas do Raciocínio Fuzzy

1ª Fuzzificação

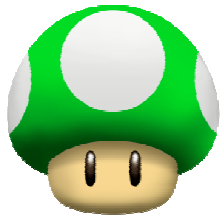
2ª Inferência

3ª Defuzzificação

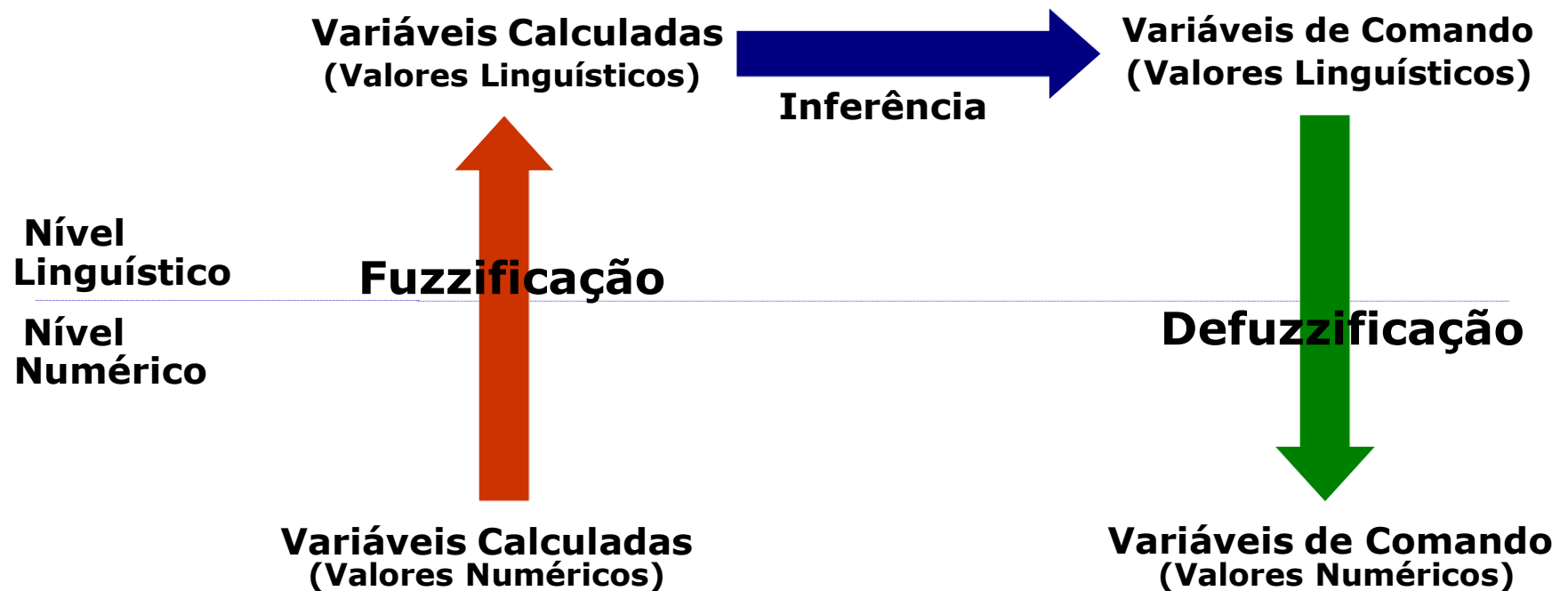
Agregação

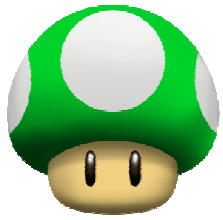


Composição



Etapas do Raciocínio Fuzzy



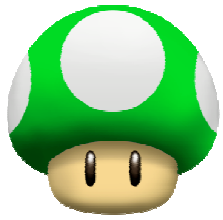


Fuzzificação

- ❏ Etapa na qual as **variáveis linguísticas** e as **funções de pertinência** são definidas de forma subjetiva.

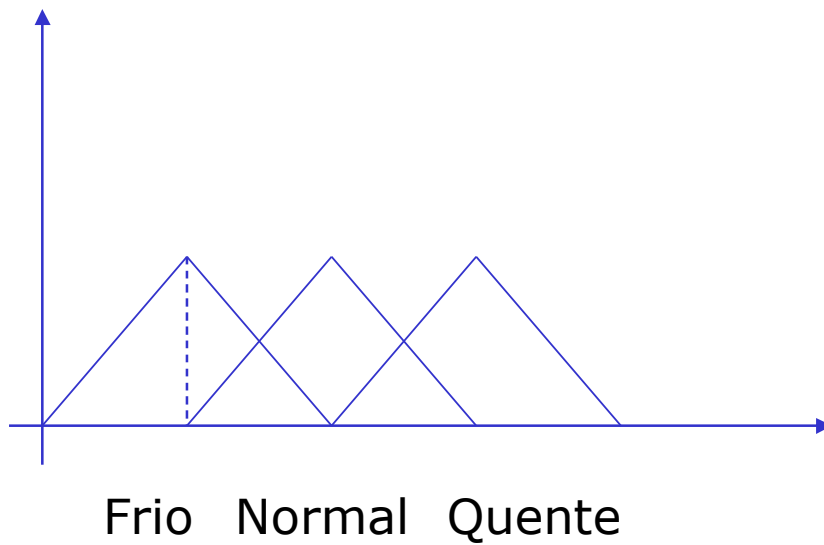
- ❏ Engloba
 - ❏ Análise do Problema
 - ❏ Definição das Variáveis
 - ❏ Definição das Funções de pertinência
 - ❏ Criação das Regiões

- ❏ Na definição das funções de pertinência para cada variável, diversos tipos de espaço podem ser gerados:
 - ❏ Triangular, Trapezoidal, ...

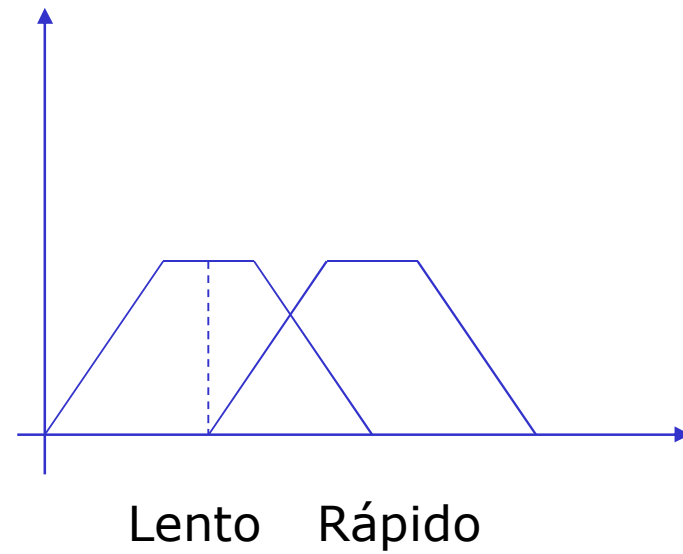


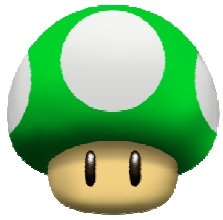
Fuzzificação

Triangular



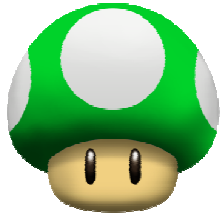
Trapezoidal





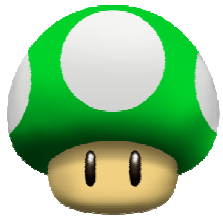
Inferência Fuzzy

- ❏ Etapa na qual as proposições (regras) são definidas e depois são examinadas paralelamente
- ❏ Engloba:
 - ❏ Definição das proposições
 - ❏ Análise das Regras
 - ❏ Criação da região resultante



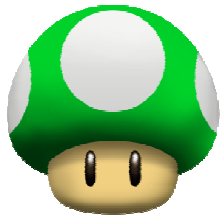
Inferência Fuzzy

- ❏ O mecanismo chave do modelo Fuzzy é a proposição.
- ❏ A proposição é o relacionamento entre as variáveis do modelo e regiões Fuzzy.
- ❏ Na definição das proposições, deve-se trabalhar com:
 - ❏ Proposições Condicionais:
 $\text{Se } W == Z \text{ então } X = Y$
 - ❏ Proposições Não-Condicionais:
 $X = Y$



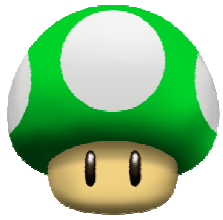
Inferência Fuzzy

- ❏ **Agregação:** Calcula a importância de uma determinada regra para a situação corrente
- ❏ **Composição:** Calcula a influência de cada regra nas variáveis de saída.



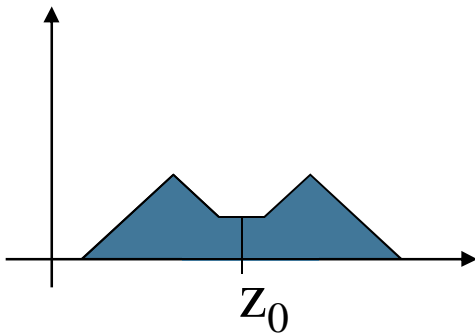
Defuzzificação

- ❏ Etapa no qual as regiões resultantes são convertidas em valores para a variável de saída do sistema.
- ❏ Esta etapa corresponde a ligação funcional entre as regiões *Fuzzy* e o valor esperado.
- ❏ Dentre os diversos tipos de técnicas de defuzzificação destaca-se:
 - ❏ Centróide
 - ❏ *First-of-Maxima*
 - ❏ Middle-of-Maxima
 - ❏ Critério Máximo

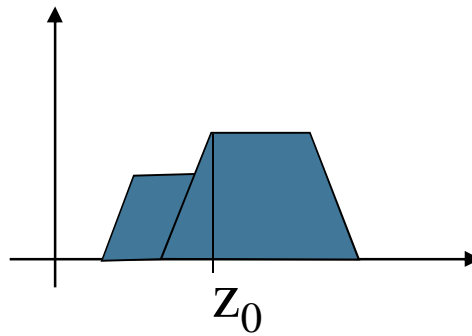


Defuzzificação

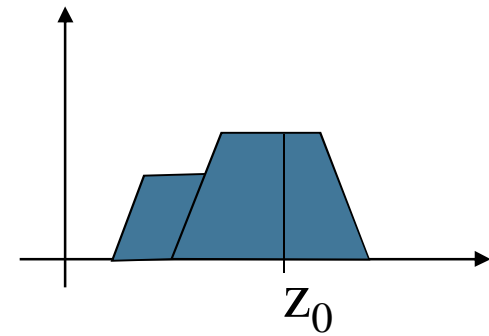
💡 Exemplos:



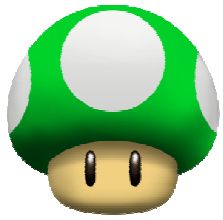
Centróide



First-of-Maxima



Critério Máximo



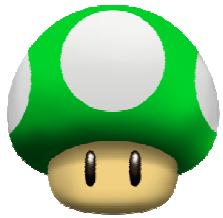
Exemplo Inferência Fuzzy

❗ Exemplo:

- ❗ Um analista de projetos de uma empresa quer determinar o risco de um determinado projeto.
- ❗ **Variáveis:** Quantidade de dinheiro e de pessoas envolvidas no projeto.

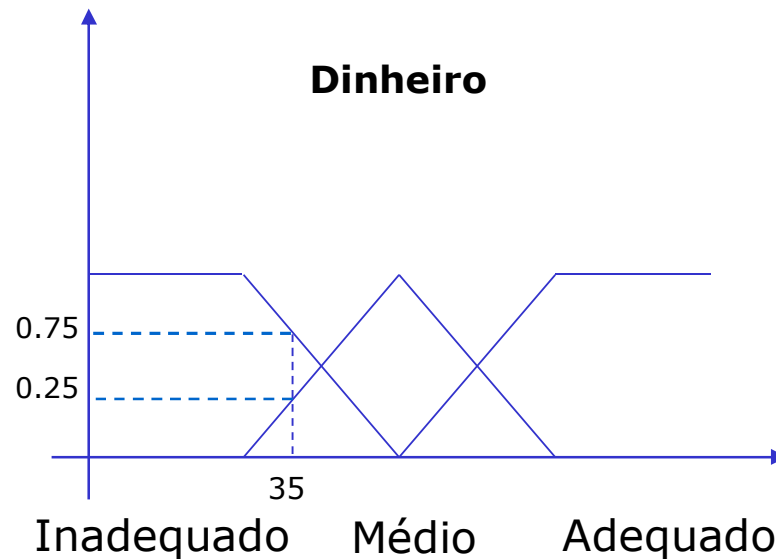
❗ Base de conhecimento:

- ❗ Se dinheiro é adequado ou o número de pessoas é pequeno então risco é pequeno.
- ❗ Se dinheiro é médio e o número de pessoas é alto, então risco é normal.
- ❗ Se dinheiro é inadequado, então risco é alto.

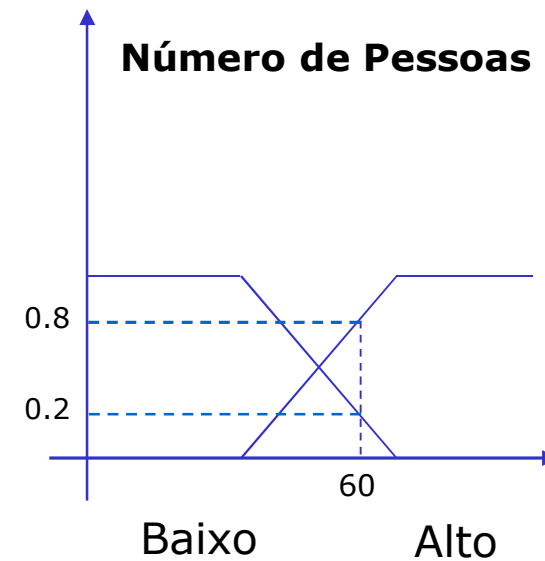


Exemplo Inferência Fuzzy

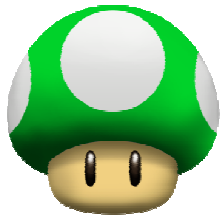
📌 Passo 1: Fuzzificar



$$\mu_i(d) = 0,25 \text{ \& } \mu_m(d) = 0,75$$



$$\mu_b(p) = 0,2 \text{ \& } \mu_a(p) = 0,8$$

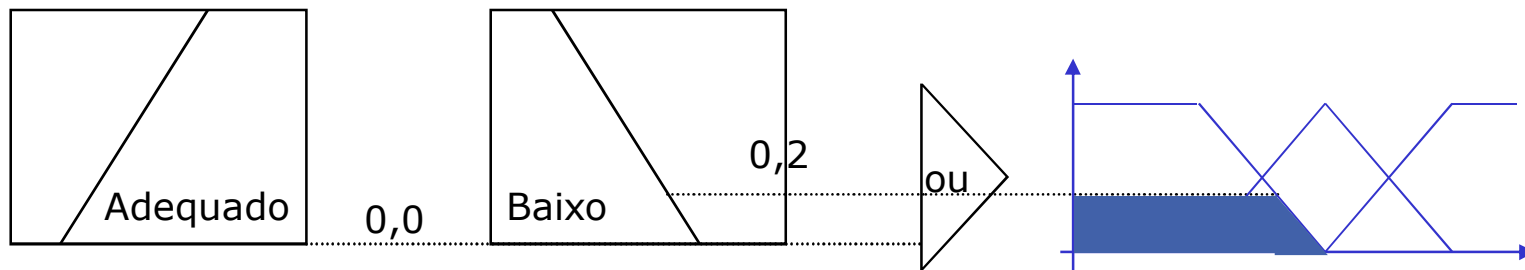


Exemplo Inferência Fuzzy

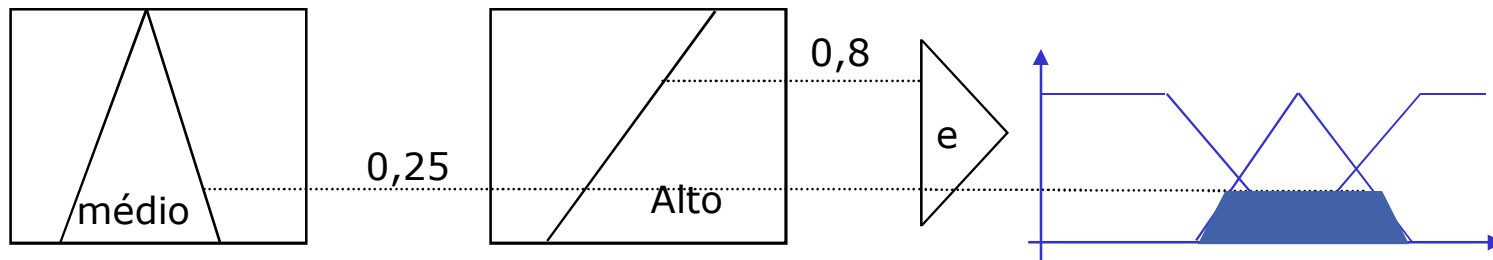
Passo 2: Avaliação das regras

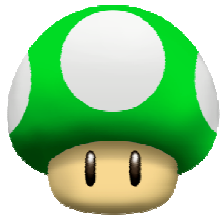
Ou \rightarrow máximo e \rightarrow mínimo

Regra 1:

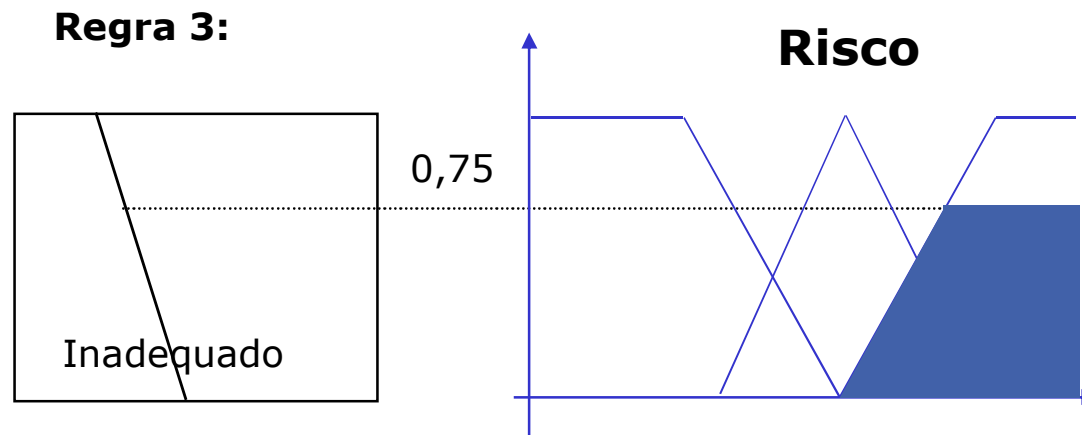


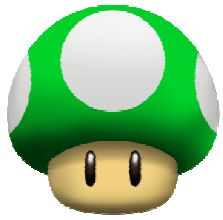
Regra 2:





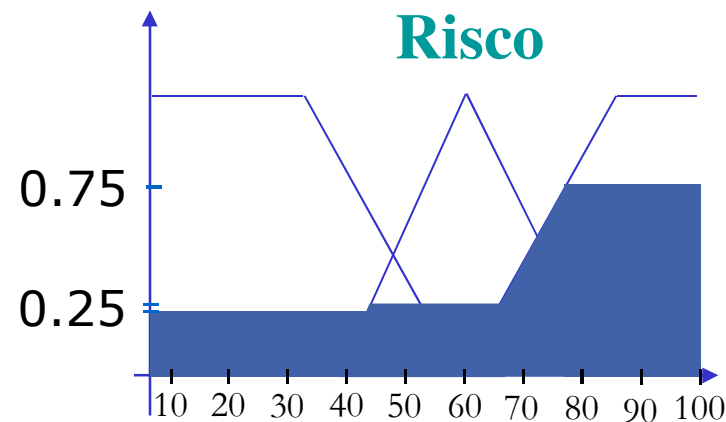
Exemplo Inferência Fuzzy





Exemplo Inferência Fuzzy

Passo 3: Defuzzificação



Cálculo do Centróide

$$C = \frac{(10+20+30+40)*0,2 + (50+60+70)*0,25 + (80+90+100)*0,75}{0,2+0,2+0,2+0,2+0,25+0,25+0,25+0,75+0,75+0,75} = \frac{267,5}{3,8} = 70,4$$