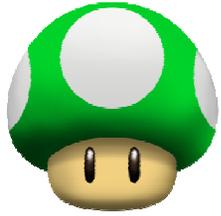


INF 1771 – Inteligência Artificial

Aula 15 – Incerteza

Edirlei Soares de Lima
<elima@inf.puc-rio.br>



Agentes Vistos Anteriormente

📌 Agentes baseados em busca:

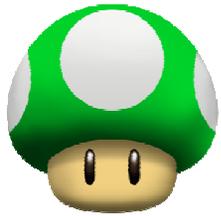
- 📌 Busca cega
- 📌 Busca heurística
- 📌 Busca local

📌 Agentes baseados em lógica:

- 📌 Lógica proposicional
- 📌 Lógica de primeira ordem

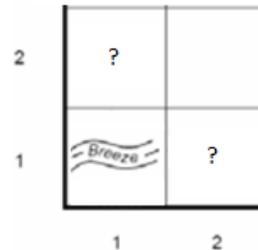
📌 Agentes baseados em planejamento:

- 📌 Planejamento de ordem parcial
- 📌 Planejamento em ambientes não-determinísticos

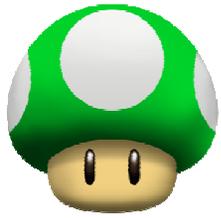


Incerteza

- ❏ Agentes raramente tem acesso à toda verdade sobre o ambiente.
- ❏ Mundo de Wumpus:
 - ❏ Apenas informações locais.
 - ❏ Maior parte do ambiente não é imediatamente observável.
 - ❏ Incerteza de fatos:

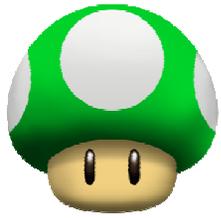


- ❏ O mundo real é muito mais complexo do que o mundo de wumpus. Informações não garantem resultados.



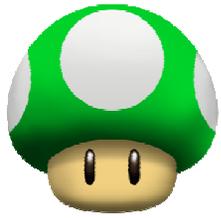
Incerteza

- ❏ **Exemplo:** Levar alguém ao aeroporto para pegar um voo.
- ❏ Seja a ação $A_t =$ sair para o aeroporto t minutos antes do voo.
- ❏ A_t levará o passageiro ao aeroporto a tempo?
- ❏ Dificuldades de saber o resultado da ação:
 - ❏ Estados parcialmente observáveis.
 - ❏ Estados das estradas, trânsito, etc.
 - ❏ Sensores ruidosos.
 - ❏ Relatórios de trânsito
 - ❏ Incerteza quanto ao efeito das ações.
 - ❏ Acidentes, pneu furado, etc.
 - ❏ Grande complexidade em prever e modelar o trânsito.



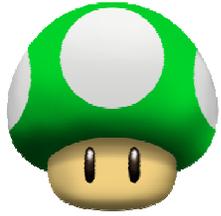
Incerteza

- ❏ Um procedimento puramente lógico não é muito útil nesse caso:
 - ❏ Arriscaria deduzir algo potencialmente falso:
 - ❏ “ A_{45} me levará a tempo ao aeroporto”
 - ❏ Levaria a conclusões fracas para tomada de decisões:
 - ❏ “ A_{45} me levará a tempo ao aeroporto, se nenhum acidente ocorrer na ponte, se não chover, se nenhum pneu furar, etc.”
 - ❏ Levaria a conclusões que não práticas:
 - ❏ “ A_{1440} me levará a tempo ao aeroporto”



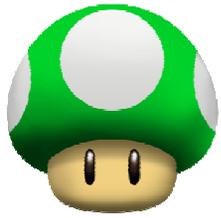
Incerteza

- ❏ O plano escolhido deve maximizar a performance do agente.
 - ❏ Chegar no aeroporto a tempo.
 - ❏ Não perder tempo esperando no aeroporto.
- ❏ O agente não tem como garantir nenhum sucesso em seus objetivos.
- ❏ Mas ele pode prever um certo grau de crença que ele terá sucesso em seus objetivos.



Incerteza

- ❓ A coisa certa a se fazer depende da importância dos objetivos e da probabilidade de que eles serão alcançados.
- ❓ É necessário lidar com a **incerteza** e a **imprecisão** dos ambientes.



Incerteza

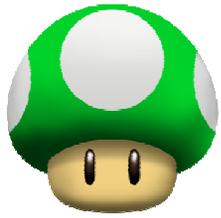
- ❏ Considerando a seguinte regra em **lógica de primeira ordem**:

$$\forall p \text{ Sintoma}(p, \text{Dor_de_Dente}) \Rightarrow \text{Doença}(p, \text{Cáries})$$

- ❏ A regra está **errada**. Nem todas as pessoas que tem dor de dente tem cáries, algumas podem ter outras doenças.

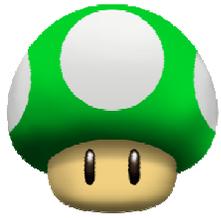
$$\forall p \text{ Sintoma}(p, \text{Dor_de_Dente}) \Rightarrow \text{Doença}(p, \text{Cáries}) \vee \text{Doença}(p, \text{Gengivite}) \vee \text{Doença}(p, \text{Abscesso}) \dots$$

- ❏ Para tornar essa regra verdadeira seria necessário adicionar a ela uma **lista infinita** de possibilidades.



Incerteza

- ❏ Tentar utilizar lógica de primeira ordem para lidar com um domínio de diagnóstico médico falha por três razões:
 - ❏ **Preguiça:** É muito trabalho listar o conjunto completo de sentenças necessárias para garantir uma regra sem exceção.
 - ❏ **Ignorância teórica:** A medicina não tem nenhuma teoria completa para todos os domínios.
 - ❏ **Prático ignorância:** Mesmo conhecendo todas as regras, poderiam existir dúvidas sobre um determinado paciente.
- ❏ Este tipo de problema afeta também outros domínios: Negócios, Direito, Design, Reparação automóveis, Jardinagem...

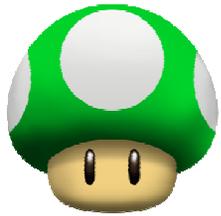


Fontes de Incerteza

- ❏ Informações precisas podem ser muito complexas para serem modeladas.
- ❏ É necessário lidar com informações incompletas.
- ❏ Implicações podem ser modeladas de forma mais fraca:
 - ❏ Dor_de_Dente(0.7) \Rightarrow Doença(Cáries)



Quantificação do número de vezes em que a regra se aplica.



Fontes de Incerteza

❏ Conflito de informações:

- ❏ Especialistas distintos podem fornecer informações conflitantes e incertas.

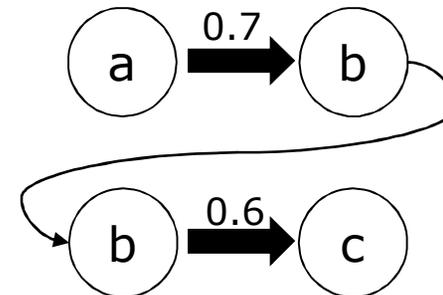
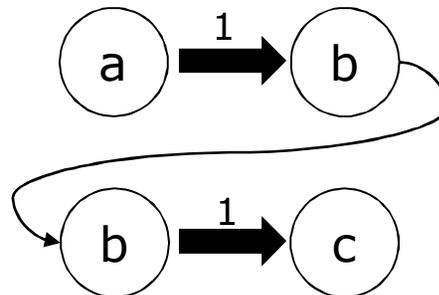
❏ Propagação de incertezas:

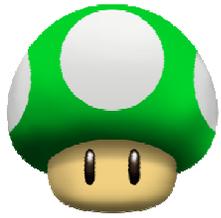
- ❏ Fatos com um certo grau de incerteza implicam em outros fatos com um grau de incerteza ainda maior.

Exemplo:

$a \Rightarrow b$

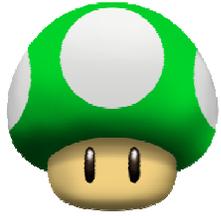
$b \Rightarrow c$





Lidando com a Incerteza

- ❏ A principal ferramenta para se lidar com a incerteza é a **teoria da probabilidade**. Busca-se atribuir um grau de crença numérica (entre 0 e 1) a cada sentença.
- ❏ Modela-se o grau de crença de um agente dadas as evidências disponíveis:
 - ❏ “ A_{25} chegará a tempo ao aeroporto com probabilidade 0.04”
 - ❏ “ A_{45} chegará a tempo ao aeroporto com probabilidade 0.85”
 - ❏ “ A_{60} chegará a tempo ao aeroporto com probabilidade 0.95”



Probabilidade

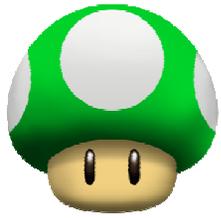
- ❏ A **probabilidade subjetiva ou bayesiana** estabelece o estado de crença do agente em uma sentença dadas as evidências.

$$P(A_{25}|\text{nenhum acidente}) = 0.06$$

- ❏ A probabilidade de um sentença muda quando novas evidências chegam.

$$P(A_{25}|\text{nenhum acidente}) = 0.06$$

$$P(A_{25}|\text{nenhum acidente, 5 a.m.}) = 0.15$$



Decisões sob Incerteza

- Supondo o seguinte conjunto de crenças:

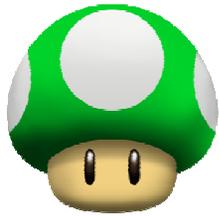
$$P(A_{25}|\dots) = 0.04$$

$$P(A_{90}|\dots) = 0.70$$

$$P(A_{120}|\dots) = 0.95$$

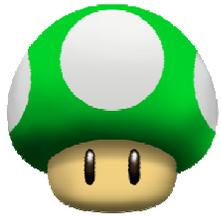
$$P(A_{1440}|\dots) = 0.9999$$

- Que ação o agente deve tomar?
 - Depende da preferência entre perder o voo versus o tempo esperando no aeroporto.
 - Teoria da utilidade** = representação de preferências
 - Teoria da decisão** = teoria da probabilidade + teoria da utilidade



Introdução à Probabilidade

- ❏ Elemento básico da probabilidade é uma **variável aleatória**.
 - ❏ **Semelhante a lógica proposicional e de primeira ordem**, onde os mundos possíveis são definidos pela atribuição de valores às variáveis.
 - ❏ Cada variável aleatória tem um **domínio** que determina seus valores possíveis.
 - ❏ Tipos de domínio:
 - ❏ **Booleano**, exemplo: Cárie possui valores em <verdadeiro,falso>
 - ❏ **Discreto**, exemplo: Clima possui valores em <ensolarado, chuvoso, nublado, neve>
 - ❏ **Contínuo**, exemplo: Temperatura



Introdução à Probabilidade

❏ **Proposições elementares:**

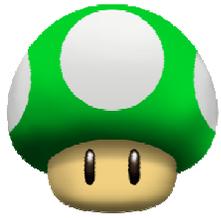
- ❏ São construídas através da atribuição de valores a variáveis.

Exemplo: Cárie = falso, Clima = chuvoso

❏ **Proposições complexas:**

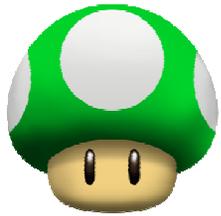
- ❏ São formadas a partir de proposições elementares e conectivos lógicos padrão.

Exemplo: Clima = chuvoso \wedge Cárie = falso



Introdução à Probabilidade

- ❏ Um **evento atômico** consiste da especificação **completa** do estado do mundo sobre o qual o agente está incerto.
 - ❏ Uma atribuição de valores a TODAS as variáveis das quais o mundo é formado.
- ❏ **Exemplo:**
 - ❏ Cárie = verdadeiro \wedge DorDeDente = verdadeiro
 - ❏ Cárie = verdadeiro \wedge DorDeDente = falso
 - ❏ Cárie = falso \wedge DorDeDente = verdadeiro
 - ❏ Cárie = falso \wedge DorDeDente = falso



Probabilidade a priori

- ❏ O grau de crença em uma proposição na ausência de outras informações pode ser definida da seguinte maneira:

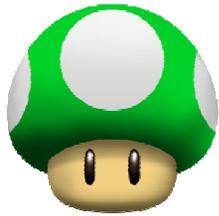
$$P(\text{Cárie} = \text{verdadeiro}) = 0.1$$

$$P(\text{Clima} = \text{ensolarado}) = 0.72$$

- ❏ Distribuição de probabilidades:

$$P(\text{Clima}) = (0.7, 0.2, 0.08, 0.02)$$

Distribuição de probabilidade da variável randômica
Clima = (ensolarado, chuvoso, nublado, neve)



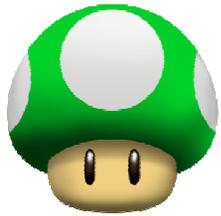
Distribuição de Probabilidade Conjunta

- Probabilidades de todas as combinações de valores de um conjunto de variáveis aleatórias.

$P(\text{Clima}, \text{Cárie}) =$ tabela 4×2 de valores de probabilidade.

Clima	ensolarado	chuvoso	nublado	neve
Cárie = verdadeiro	0.144	0.02	0.016	0.02
Cárie = falso	0.576	0.08	0.064	0.08

- Uma distribuição conjunta total especifica a probabilidade de qualquer evento atômico.
 - Qualquer probabilidade nesse domínio pode ser calculada a partir da distribuição conjunta total.



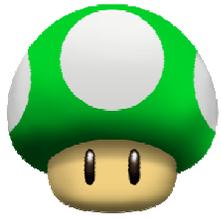
Probabilidade Condicional ou “a posteriori”

- ❏ O grau de crença em uma proposição dada a presença de novas evidências pode ser definido utilizando a notação $P(a|b)$:

$$P(\text{Cárie} = \text{verdadeiro} \mid \text{Dor_De_Dente} = \text{verdadeiro}) = 0.6$$

$$P(\text{Cárie} = \text{verdadeiro} \mid \text{Dor_De_Dente} = \text{verdadeiro}, \\ \text{Escova_Dentes_Regularmente} = \text{false}) = 0.7$$

- ❏ $P(a|b)$ = “A probabilidade de a dado todo o conhecimento b ”.



Probabilidade Condicional

- ❏ A probabilidade condicional pode ser definida em termos de probabilidades a priori:

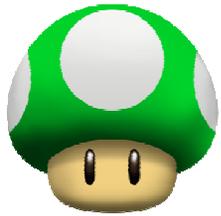
$$P(a|b) = \frac{P(a \wedge b)}{P(b)} \quad \text{se } P(b) > 0$$

- ❏ A mesma equação também pode ser escrita da seguinte maneira utilizando a **regra do produto**:

$$P(a \wedge b) = P(a|b)P(b)$$

- ❏ Ou:

$$P(a \wedge b) = P(b|a)P(a)$$



Axiomas da Probabilidade

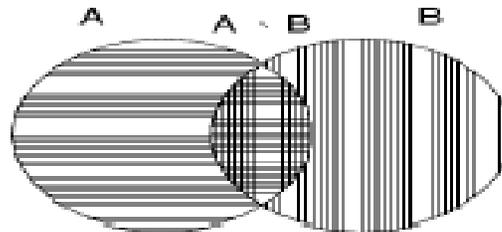
❏ Para quaisquer proposições A, B :

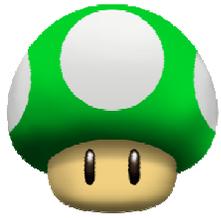
❏ $P(A) \geq 0$ e $P(A) \leq 1$

❏ $P(\text{Verdade}) = 1$

❏ $P(\text{Falso}) = 0$

❏ $P(A \vee B) = P(A) + P(B) - P(A \wedge B)$



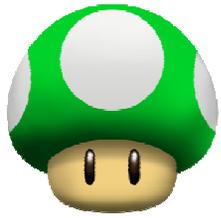


Probabilidade

- ❓ A probabilidade de uma proposição é igual à soma das probabilidades dos eventos atômicos em que ela é válida:

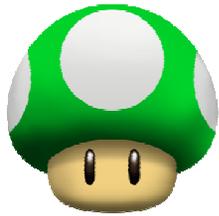
$$P(a) = \sum_{e_i \in e(a)} P(e_i)$$

- ❓ Essa equação permite calcular a probabilidade de qualquer proposição dada uma distribuição conjunta total que especifique todos os eventos atômicos.



Inferência Probabilística

- ❏ **Inferência probabilística** consiste na computação da distribuição de probabilidade posterior para um conjunto de variáveis de consulta C dada alguma evidência observada.
- ❏ A inferência é realizada com o uso de **distribuições conjuntas totais**. Ou seja, uma base de conhecimento a partir da qual são derivadas respostas para todas as consultas.

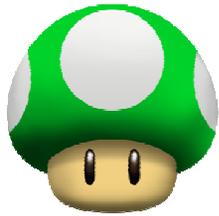


Inferência Probabilística

- Suponha um domínio com a seguinte distribuição conjunta total:

	Dor_De_Dente		¬Dor_De_Dente	
	Sonda	¬Sonda	Sonda	¬Sonda
Cárie	0.108	0.012	0.072	0.008
¬Cárie	0.016	0.064	0.144	0.576

- Para qualquer proposição a , $P(a)$ é a soma dos eventos atômicos w onde a ocorre:
$$P(a) = \sum_{e_i \in e(a)} P(e_i)$$



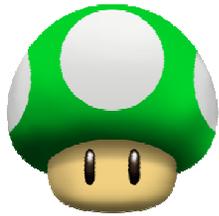
Inferência Probabilística

- Suponha um domínio com a seguinte distribuição conjunta total:

	Dor_De_Dente		¬Dor_De_Dente	
	Sonda	¬Sonda	Sonda	¬Sonda
Cárie	0.108	0.012	0.072	0.008
¬Cárie	0.016	0.064	0.144	0.576

- Para qualquer proposição a , $P(a)$ é a soma dos eventos atômicos w onde a ocorre: $P(a) = \sum_{e_i \in e(a)} P(e_i)$

$$P(\text{Dor_De_Dente}) = 0.108 + 0.012 + 0.016 + 0.064 = 0.2$$



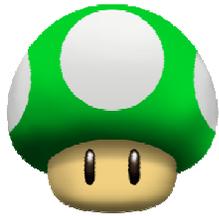
Inferência Probabilística

- Suponha um domínio com a seguinte distribuição conjunta total:

	Dor_De_Dente		¬Dor_De_Dente	
	Sonda	¬Sonda	Sonda	¬Sonda
Cárie	0.108	0.012	0.072	0.008
¬Cárie	0.016	0.064	0.144	0.576

- Para qualquer proposição a , $P(a)$ é a soma dos eventos atômicos w onde a ocorre: $P(a) = \sum_{e_i \in e(a)} P(e_i)$

$$P(\text{Dor_De_Dente} \vee \text{Cárie}) = 0.108 + 0.012 + 0.016 + 0.064 + 0.072 + 0.008 = 0.28$$



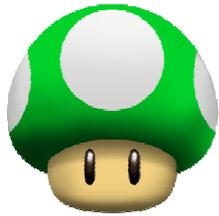
Inferência Probabilística

- É possível também calcular probabilidades condicionais: $P(a|b) = \frac{P(a \wedge b)}{P(b)}$

	Dor_De_Dente		¬Dor_De_Dente	
	Sonda	¬Sonda	Sonda	¬Sonda
Cárie	0.108	0.012	0.072	0.008
¬Cárie	0.016	0.064	0.144	0.576

$$P(\neg\text{Cárie} | \text{Dor_De_Dente}) = \frac{P(\neg\text{Cárie} \wedge \text{Dor_De_Dente})}{P(\text{Dor_De_Dente})}$$

$$P(\neg\text{Cárie} | \text{Dor_De_Dente}) = \frac{0.016 + 0.064}{0.108 + 0.012 + 0.016 + 0.064} = 0.4$$

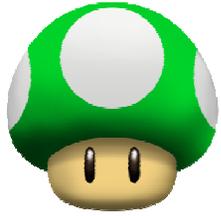


Inferência Probabilística

- ❏ O denominador pode ser visto como uma constante de normalização α .

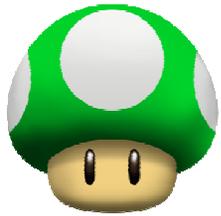
	Dor_De_Dente		\neg Dor_De_Dente	
	Sonda	\neg Sonda	Sonda	\neg Sonda
Cárie	0.108	0.012	0.072	0.008
\neg Cárie	0.016	0.064	0.144	0.576

$$\begin{aligned}P(\text{Cárie} \mid \text{Dor_De_Dente}) &= \alpha P(\text{Cárie}, \text{Dor_De_Dente}) \\&= \alpha [P(\text{Cárie}, \text{Dor_De_Dente}, \text{Sonda}) + P(\text{Cárie}, \text{Dor_De_Dente}, \neg \text{Sonda})] \\&= \alpha [\langle 0.108, 0.016 \rangle + \langle 0.012, 0.064 \rangle] \\&= \alpha [\langle 0.12, 0.08 \rangle] \\&= \langle 0.6, 0.4 \rangle\end{aligned}$$



Problemas com a inferência por enumeração

- ❏ Complexidade de tempo (pior caso): **$O(d^n)$**
 - ❏ onde **d** é a cardinalidade do maior domínio e **n** é o número de variáveis.
- ❏ Complexidade de espaço: **$O(d^n)$** para armazenar a distribuição conjunta.
- ❏ Como encontrar as probabilidades para **$O(d^n)$** elementos?



Independência

- ❏ X e Y são **independentes** se e somente se:

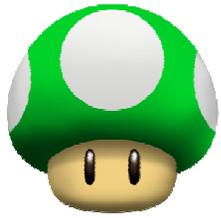
$$\mathbf{P}(X|Y) = \mathbf{P}(X) \text{ ou } \mathbf{P}(Y|X) = \mathbf{P}(Y) \text{ ou } \mathbf{P}(X,Y) = \mathbf{P}(X)\mathbf{P}(Y)$$

- ❏ **Exemplo:** $\mathbf{P}(\text{Dor_De_Dente}, \text{Sonda}, \text{Cárie}, \text{Clima})$

- ❏ Tabela com 32 elementos.

$$\mathbf{P}(\text{Dor_De_Dente}, \text{Cárie}, \text{Sonda}, \text{Clima}) = \mathbf{P}(\text{Dor_De_Dente}, \text{Cárie}, \text{Sonda})\mathbf{P}(\text{Clima})$$





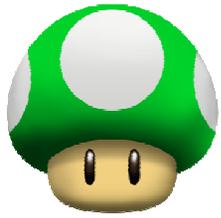
Teorema de Bayes

Seja:

- $P(A | B)$ a probabilidade de que a hipótese A seja verdadeira dada a evidência B.
- $P(B | A)$ a probabilidade que a evidência B será observada se a hipótese A for verdadeira.
- $P(A)$ a probabilidade "a priori" que a hipótese A é verdadeira na ausência de qualquer evidência específica.
- k o número de hipóteses possíveis.

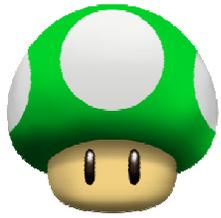
O Teorema de Bayes é formulado como:

$$P(A | B) = \frac{P(B | A) * P(A)}{\sum_{n=0}^k P(B | A_n) * (P(A_n))} \qquad P(A | B) = \frac{P(B | A)P(A)}{P(B)}$$



Regra de Bayes – Exemplo

- ❏ Para aplicar a regra de Bayes é necessário três termos:
 - ❏ Uma probabilidade condicional.
 - ❏ Duas probabilidades incondicionais.
- ❏ Exemplo de diagnostico médico:
 - ❏ “um médico sabe que a meningite causa torcicolo em 50% dos casos. Porém, o médico também conhece algumas probabilidades incondicionais que dizem que, um caso de meningite atinge 1/50000 pessoas e, a probabilidade de alguém ter torcicolo é de 1/20”.



Regra de Bayes – Exemplo

💡 Considerando:

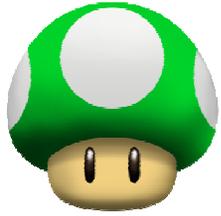
- 💡 **T** = probabilidade incondicional de um paciente ter torcicolo:

$$\mathbf{P(T) = 1/20}$$

- 💡 **M** = probabilidade incondicional de um paciente ter meningite.

$$\mathbf{P(M) = 1/50000}$$

- 💡 **P(T|M) = 0.5** (probabilidade de ter torcicolo tendo meningite)



Regra de Bayes – Exemplo

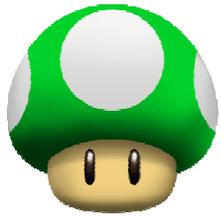
- Aplicando a regra de Bayes:

$$P(M | T) = \frac{P(T | M)P(M)}{P(T)}$$

$$P(M | T) = \frac{0.5 \times 1/50000}{1/20}$$

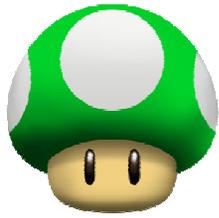
$$P(M | T) = 0.0002$$

- É esperado que apenas 1 em 5000 pacientes com torcicolo tenha meningite.



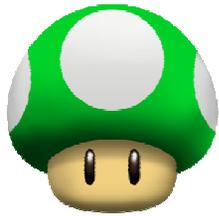
Regra de Bayes – Exemplo

- Apesar de torcicolo ser um fortemente indicativo de meningite (com probabilidade 0.5), a probabilidade de meningite no paciente permanece pequena.



Regra de Bayes – Combinando Evidencias

- ❏ $P(\text{Cárie} | \text{Dor_De_Dente} \wedge \text{Sonda})$
 $= \alpha < 0.108, 0.016 >$
 $= < 0.871, 0.129 >$
- ❏ Utilizando o conceito de **independência** é possível reduzir o problema de escala em problemas mais complexos.
- ❏ Funcionaria se Dor_De_Dente e Sonda fossem independentes, mas eles não são. Essas variáveis são independentes somente dado a presença ou a ausência de Cárie.



Regra de Bayes – Combinando Evidencias

- ❏ Dor_De_Dente e Sonda são causas diretas de Cárie, mas não tem nenhum efeito direto uma sobre a outra.

$$P(\text{Dor_De_Dente} \wedge \text{Sonda} | \text{Cárie}) = P(\text{Dor_De_Dente} | \text{Cárie})P(\text{Sonda} | \text{Cárie})$$

- ❏ Para obter a probabilidade de Cárie:

$$P(\text{Cárie} | \text{Dor_De_Dente} \wedge \text{Sonda}) = \alpha P(\text{Dor_De_Dente} | \text{Cárie})P(\text{Sonda} | \text{Cárie})P(\text{Cárie})$$